

## **DETERMINACIÓN DE NIVELES VAN HIELE EN ALUMNOS DE PRIMER AÑO MEDIO SOBRE LA TRANSFORMACIÓN ISOMÉTRICA DE SIMETRÍA**

### ***Determining Van Hiele Levels in Pupils of First Year High School on the Isometric Transformation of Symmetry***

Danilo Antonio Díaz Levicoy<sup>1</sup>

#### **Abstract**

*This article presents the results of research carried out in pupils of tenth grade from Liceo Eleuterio Ramirez in Osorno. The objective of the research is to recognize the development of geometric thinking according to the theory of Van Hiele. The used methodology is qualitative, specifically through case-study. The collection of data was carried out through a tracking of the stated activities, observation of the participants, and interviews. The results illustrate that most pupils show characteristics of the first level of recognition to the isometry of symmetry.*

**Key words:** *Geometric thinking - Van Hiele levels - isometric transformations - symmetry.*

#### **Resumen**

Este artículo presenta los resultados de una investigación realizada en alumnos de Primer Año Medio del Liceo Eleuterio Ramírez de Osorno. El objetivo de dicha investigación era conocer el desarrollo del pensamiento geométrico en el tema de transformaciones isométricas según la Teoría de Van Hiele. La metodología de investigación es cualitativa, específicamente mediante estudio de casos. La recolección de datos se realizó mediante un seguimiento en el desarrollo de las actividades planteadas, observación de participantes y entrevistas. Como resultado se obtuvo que los alumnos mayoritariamente exhiben características del nivel 1 de reconocimiento para la isometría de simetría.

---

<sup>1</sup> Profesor de Matemática y Computación, Licenciado en Educación, Colegio Proyección Siglo XXI, Osorno, Chile. E-mail:dddiaz01@hotmail.com

**Palabras clave:** Pensamiento geométrico - niveles van Hiele - transformaciones isométricas - simetría.

## **Introducción**

Los conceptos geométricos aparecen en la vida cotidiana de diversas formas (Barrera y Centeno, 2006; Santaló, 1994) y ocupan un lugar privilegiado en los currículos escolares por su aporte a la formación del individuo (Mammana y Villani, 1998). Frente a esta situación, los educadores muestran gran preocupación por el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, problemática que viene observándose desde hace varios años en el ámbito internacional, destacando Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldolf, quienes en los años 50, preocupados porque sus estudiantes no entendían lo que se explicaba, deciden realizar una investigación que les permita determinar la forma cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes y buscar la manera de ayudar a los alumnos a mejorar la calidad de sus razonamiento. De esta forma nace la teoría del desarrollo del pensamiento geométrico de los Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1991; Corberan et al, 1994), que entregó el soporte teórico para el desarrollo de este estudio, teoría que da forma al marco referencial de esta investigación, y se describe a continuación.

## **Objetivos del estudio**

Conocer el Desarrollo del Pensamiento Geométrico de los estudiantes de Primer Año de Enseñanza Secundaria a través de niveles de logro, según la Teoría del Desarrollo del Pensamiento Geométrico de Van Hiele

## **Marco Teórico**

### **Dificultades en la Enseñanza de la Geometría**

Son muchas las complicaciones que tienen los profesores de matemática de educación secundaria para que los alumnos comprendan los temas que se trabajan en el aula y vayan más allá de la memorización de definiciones, demostraciones, algoritmos, propiedades o ejercicios.

Las causas de estas dificultades son múltiples y complejas, tanto de tipo social como académico, siendo una de las principales, la falta de preparación de los estudiantes para superar el salto de la educación primaria a la secundaria (Corberan et al., 1994). Además, estas dificultades nacen por el tipo de metodología utilizada por el profesor; algunos utilizan una enseñanza de tipo informal, basada en la manipulación y observación que logran los alumnos tras realizar una actividad práctica. Otros profesores utilizan una enseñanza más deductiva, en la cual, es un requisito fundamental el memorizar definiciones, propiedades, teoremas, algoritmos y fórmulas.

Por parte de los alumnos, éstos en ocasiones, “no tienen la madurez matemática necesaria para realizar las tareas y demostraciones que demanda esta área y que ese tipo de trabajo requiere, o bien, se debe a que no se presentan, generalmente, por parte de los profesores, actividades tendientes a la inducción de descubrimientos que conllevan a las demostraciones” (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997).

Por su parte, los profesores se lamentan de una serie de problemas, como que muchas veces no hay manera de conseguir que los estudiantes comprendan algún concepto nuevo; otras veces parece que éstos “se saben” los conceptos y propiedades que el profesor les acaba de instruir, pero sólo son capaces de usarlos en ejemplos idénticos a los resueltos con ayuda del profesor. También ocurre, especialmente en Enseñanza Media, que los estudiantes pueden resolver problemas concretos con bastante habilidad, pero carecen de ideas cuando deben resolver esos mismos problemas planteados en un contexto algo diferente, abstracto o más formalizado; otra situación típica de las clases de matemáticas es la de los estudiantes que tienen que recurrir a memorizar las demostraciones de los teoremas o las formas de resolver los problemas, pues es la única forma que tienen de aprobar las evaluaciones.

Sin duda, estas dificultades en la enseñanza de la geometría constituyen un problema de carácter internacional que ha persistido desde su comienzo y que, en nuestro tiempo, son una preocupación central de los investigadores en didáctica.

## **Teoría del Desarrollo del Pensamiento Geométrico de Van Hiele**

En los años 50, los esposos Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, a partir de su experiencia docente, elaboraron un modelo que trata de explicar por un lado, cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes (Niveles) y, por otro, cómo puede un profesor(a) ayudar a sus alumnos(as) para que mejoren la calidad de su razonamiento (Fases), los cuales se describen a continuación.

### **Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele**

Estos niveles describen las características del proceso de pensamiento. En él se afirma que el alumno se mueve desde el nivel inicial o básico (visualización), hasta el más alto (rigor), el cual se relaciona con los aspectos abstractos formales de la deducción.

A continuación, se describen los Niveles según diferentes autores (Barrera y Centeno, 2006; Cabezas, Aravena y Caamaño, 2005; Corberan et al, 1994; Denis, 1994; Jaime, 1993; Jaime, 1994).

#### ***Nivel 1: Visualización***

Perciben las figuras geométricas en su totalidad, es decir, no reconocen las partes que componen las figuras ni sus propiedades matemáticas y realizan descripción de figuras basándose en sus semejanzas con otros objetos que conocen; usan frases como "...se parece a...", "...tiene forma de...", Etc.

#### ***Nivel 2: Análisis***

Sólo reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos; los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación. Además, cuando se les pide que definan una figura, recitan una lista de propiedades necesarias para identificar la figura, y no las propiedades necesarias y suficientes.

### ***Nivel 3: Deducción Informal***

Los alumnos son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones, sin embargo, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación. Los estudiantes no entienden la necesidad de encadenamiento de estos pasos, ni entienden la estructura de la demostración.

### ***Nivel 4: Deducción Formal***

Alcanzando este nivel, los estudiantes pueden entender y realizar demostraciones (de varios pasos), ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como medio para verificar la verdad de una afirmación.

### ***Nivel 5: Rigor***

Aquí los estudiantes adquieren conocimientos y habilidades propias de los matemáticos profesionales, encentrándose en el máximo nivel de rigor matemático, donde pueden trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos y compararlos.

Los niveles en el Modelo de Van Hiele no son independientes uno de otros, ya que si una persona razona según el nivel superior, debe dominar las capacidades del (de los) nivel(es) anterior(es) (Corberan et al, 1994; Denis, 1994; Jaime, 1993).

## **Las fases de aprendizajes del Modelo de Van Hiele**

Los Van Hiele afirman que existe la posibilidad de alcanzar niveles más altos de razonamiento si se consiguen las experiencias apropiadas. A continuación se explica brevemente cada fase según variados autores (Jaime, 1993; Denis, 1994; Cabezas, Aravena y Caamaño, 2005; Corberan et al, 1994).

### ***Fase 1: Información o Diagnóstico***

En esta etapa, el profesor y los estudiantes llevan a cabo conversaciones y actividades acerca de los objetivos de estudio para ese nivel. El profesor debe informar a los estudiantes sobre el tema de estudio en el que van a trabajar, qué tipos de problemas se van a plantear, qué materiales se van a utilizar, etc.

***Fase 2: Orientación dirigida***

En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. Esas actividades podrían revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel. Así, la mayoría de los materiales serán tareas breves, diseñadas para lograr respuestas específicas.

***Fase 3: Explicación***

Una de las finalidades principales de la tercera fase es que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten lo que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo esto en un contexto de diálogo en el grupo.

***Fase 4: Orientación libre***

Ahora los alumnos deben aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras actividades diferentes de las anteriores. Los alumnos mejoran los conocimientos del tema en estudio mediante el planteamiento por parte del profesor, de problemas que puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones.

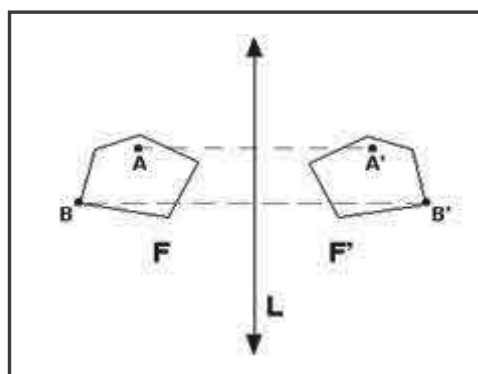
***Fase 5: Integración***

Los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento. El nuevo dominio de pensamiento reemplaza al antiguo y están listos para repetir las fases de aprendizaje en el siguiente nivel.

**Simetría y su base matemática****Definición**

Dos figuras planas se dicen simétricas si al doblar una hoja de papel, donde se encuentran, en un eje determinado, ambas coinciden plenamente. El eje en cuestión se llama eje de simetría.

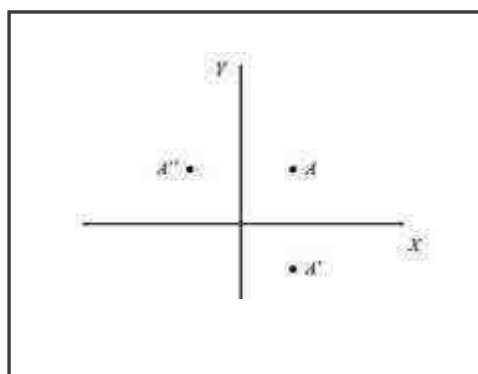
**Figura N°1**  
**Simetría e Imagen de una Figura**



### Simetría en el Plano Cartesiano

El simétrico de un punto  $A(x,y)$  con respecto al eje X es  $A'(x, -y)$  y con respecto al eje Y es  $A''(-x,y)$

**Figura N°2**  
**Simetría en el Plano Cartesiano**



## Las Transformaciones Isométricas en el Currículum Educacional Chileno

*Contenidos según el MINEDUC (2008)*

- Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas. Construcción de figuras por traslación, por simetría y por rotación en 60, 90, 120 y 180 grados.

- Uso de regla y compás, de escuadra y transportador, que permita dibujar y transformar figuras geométricas.
- Traslación y simetrías de figuras en sistemas de coordenadas.

### ***Aprendizajes esperados según el MINEDUC (2008)***

Los alumnos y alumnas:

- Caracterizan la traslación, simetría y rotación de figuras en un plano.
- Describen los cambios que observan entre una figura y su imagen por traslación, rotación o simetría.
- Construyen, utilizando escuadra y compás, figuras simétricas, trasladadas y rotadas.
- Diseñan composiciones sencillas que incorporan traslaciones, simetrías y rotaciones.
- Describen patrones que se observan en la aplicación de simetrías, rotaciones y traslaciones en un sistema de coordenadas.

### **Marco metodológico**

El estudio se realizó en el Liceo Eleuterio Ramírez de la comuna de Osorno, provincia de Osorno, en la décima región de Los Lagos, Liceo Municipalizado de modalidad Científico-Humanista.

La población objeto de estudio estuvo constituida por 45 personas, entre alumnas y alumnos de un Primer Año Medio del Liceo antes mencionado, quienes tenían una edad promedio de 14 años, procedentes mayoritariamente de la comuna de Osorno y alrededores, y de una situación socioeconómica Media-Baja según indicadores SIMCE. De esta población, se extrajo una muestra de 4 alumnos elegidos al azar.

El tipo de metodología aplicada en este estudio es cualitativa, mediante estudio de casos (López, 2002), donde se estudió la ocurrencia de determinados sucesos que tienen que ver con el desarrollo del pensamiento geométrico de la Teoría de los Van Hiele sobre el tópico de transformaciones isométricas.

Las técnicas para recoger los datos fueron la observación participante del desarrollo de las actividades y entrevistas, sobre un conjunto de actividades previamente revisadas y aprobadas mediante validación de contenidos. La observación participante se desarrolló en un total de 9 sesiones de dos horas pedagógicas cada una, lo que correspondió a un total de 18 horas durante tres semanas, revisión de cuaderno y hojas de respuestas y entrevistas individuales sobre cómo se desarrolló la actividad y por qué.

### **Evaluación de las respuestas y la asignación de los grados de adquisición**

Este tipo de respuestas son aplicables a ítemes de respuestas libres; estas preguntas pueden ser contestadas en distintos niveles de Van Hiele, por lo que al momento de evaluar una respuesta, primero se debe determinar el nivel de razonamiento en que es respondida y después se debe analizar la calidad de la respuesta, desde una perspectiva del nivel que se considera, teniendo en cuenta tanto su precisión matemática como el empleo del nivel de razonamiento en cuestión (Jaime, 1993)

**Tabla N°1**  
**Las Características de los Tipos de Respuestas**

|               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tipo 1</b> | Ítemes sin respuesta, con respuestas no codificadas o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento.                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Tipo 2</b> | Respuesta matemáticamente incorrecta y muy incompleta, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento.                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Tipo 3</b> | Respuesta matemáticamente correcta pero muy incompleta, en las que se reconocen indicios de cierto nivel de razonamiento. Se trata de respuestas muy breves y pobres, sin errores matemáticos.                                                                                                                                                                                  |
| <b>Tipo 4</b> | Respuestas que reflejan claramente características de dos tipos de niveles de razonamiento consecutivos. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición de nivel. Las respuestas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.                                                                                           |
| <b>Tipo 5</b> | Respuestas bastante completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan la utilización predominante de un nivel de razonamiento. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución del problema planteado, pero cuyos procesos de razonamiento son válidos.                             |
| <b>Tipo 6</b> | Respuestas bastante completas y matemáticamente correctas que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas, pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema totalmente, porque hay “saltos” en el razonamiento deductivo seguido, porque tiene pequeños errores, etc. |
| <b>Tipo 7</b> | Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado.                                                                                                                                                                                                                                                |

Para la ponderación de cada tipo de respuesta, se trabajó con la utilizada por Jaime (1993), quien asigna a cada tipo de respuesta un valor en el intervalo (0,100) resumidas en la Tabla N° 2.

**Tabla N° 2**  
**Ponderación a Cada Tipo de Respuesta**

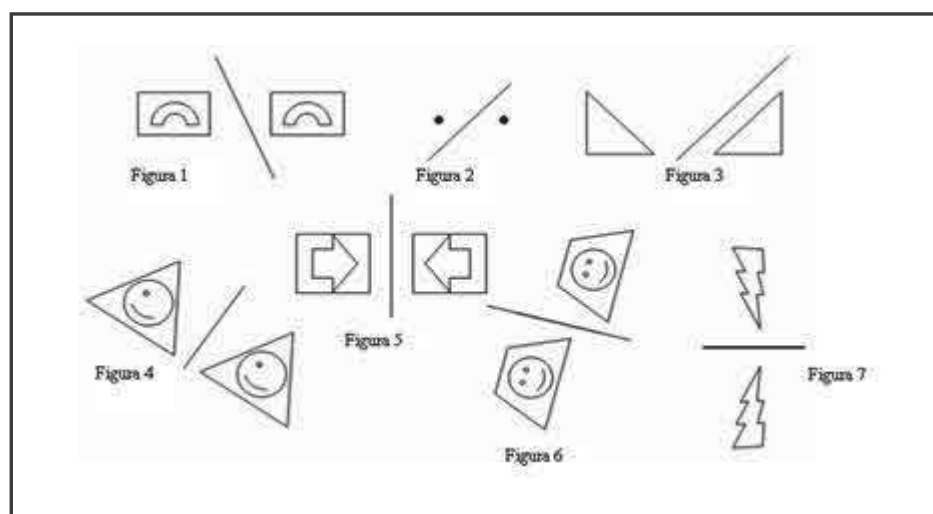
| Tipo            | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7   |
|-----------------|---|----|----|----|----|----|-----|
| Ponderación (%) | 0 | 20 | 25 | 50 | 75 | 80 | 100 |

Como las respuestas pueden ser clasificadas en diferentes niveles, para determinar el grado de adquisición alcanzado por los estudiantes, se calculó la media aritmética de las ponderaciones asignadas a cada uno de los niveles asignados.

## Análisis e interpretación de los datos

### 1. Reconocer de los pares de figuras, cuáles se corresponden mediante una simetría

*Clasificación nivel de razonamiento: 1*

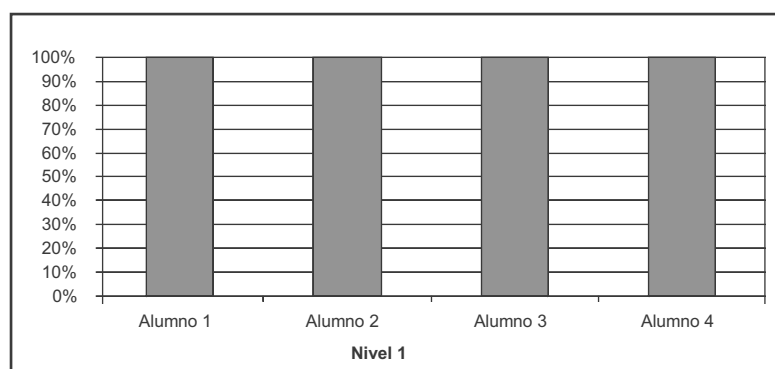


**Tabla N° 3**  
**Descripción Repuesta Pregunta 1**

|          | Nivel de Van Hiele | Descripción y Respuesta                                                                                                | Tipo de Respuesta | Ponderación % |
|----------|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|---------------|
| Alumna 1 | 1                  | La alumna responde: “5 y 7, porque quedan iguales, cuando doblamos la hoja (respecto al eje de simetría)”              | 7                 | 100           |
| Alumno 2 | 1                  | Este alumno indica: “5 y 7, porque quedan iguales al doblar la hoja (respecto al eje de simetría)”                     | 7                 | 100           |
| Alumna 3 | 1                  | También indica que “5 y 7, porque al doblar la hoja me fijé que estos coincidían”                                      | 7                 | 100           |
| Alumna 4 | 1                  | La alumna 4 coincide con sus compañeros al señalar: “5 y 7, porque si doblamos la hojita quedan iguales (las figuras)” | 7                 | 100           |

Esta es una de las preguntas que el 100% de los estudiantes investigados contestó correctamente, debido a que les era muy fácil comprobar cuando era simétrico o no, mediante el doblaje de las figuras respecto a los ejes.

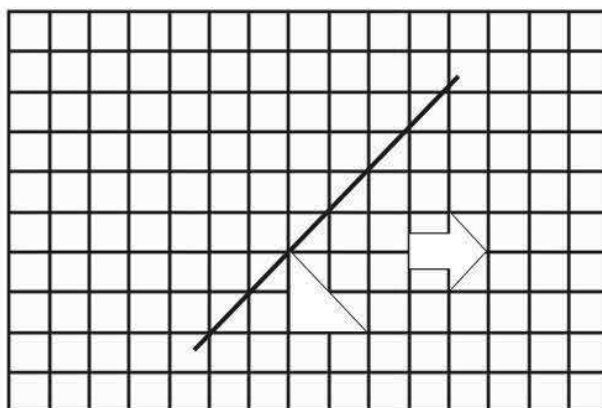
**Gráfico N° 1**  
**Grado de Adquisición Niveles Van Hiele para Pregunta 1**



$$\text{Grado de adquisición promedio: } G.A(\text{Nivel } 1) = \frac{100 + 100 + 100 + 100}{4} = 100\%$$

Según la respuesta entregada por los alumnos, las respuestas promedios corresponden a un Nivel 1, con un grado de adquisición del 100%.

**2. Obtener las imágenes de las figuras mediante una simetría con el eje señalado** *Clasificación nivel de razonamiento: 2.*



**Tabla N° 4**  
**Descripción Respuesta Pregunta 2**

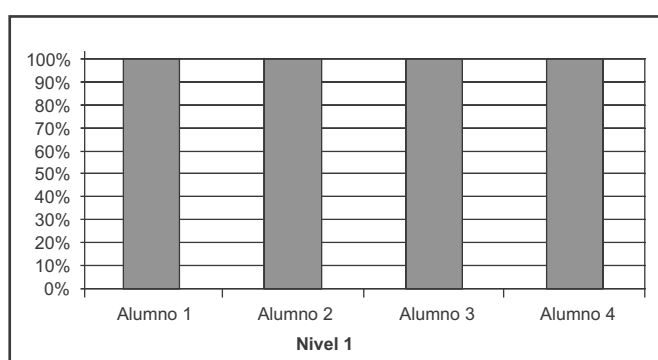
|          | Nivel de Van Hiele | Descripción y Respuesta                                                                                                                                              | Tipo de Respuesta | Ponderación % |
|----------|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|---------------|
| Alumna 1 | 1                  | Frente a la pregunta ¿cómo lo hiciste?, la alumna responde: “el desarrollo se hizo midiendo los cuadraditos y haciendo el doblado”                                   | 7                 | 100           |
| Alumno 2 | 1                  | Frente a la misma pregunta el alumno 2 responde: “la solución de la actividad se realizó mediante el doblaje de la hoja y mirando las distancias”                    | 7                 | 100           |
| Alumna 3 | 1                  | Frente a pregunta anterior la alumna 3 señala: “la solución la obtuve por el doblaje de las hojas y marcando los vértices”                                           | 7                 | 100           |
| Alumna 4 | 1                  | La alumna 3 responde frente a la pregunta: “contando la cantidad de cuadrados a que se encuentran del eje y la flecha lo hice doblando, producto de la complicación” | 7                 | 100           |

La alumna 1, la primera parte de la actividad la realizó sin complicaciones contando la cantidad de cuadritos, pero para las otras figuras donde no había cuadritos y particularmente la flecha que estaba sobre el eje, lo realizó con doblaje por la complicación (según lo que señaló el estudiante).

Para los alumnos 1, 2 y 3 la complicación fue realizar la simetría de la figura que se encuentra sobre el eje de simetría, la cual finalmente se solucionó doblando la hoja y marcando los vértices.

Para el desarrollo de esta actividad, la metodología que predominó fue la de doblar la hoja respecto al eje de simetría, características de un Nivel 1 de Reconocimiento, según la Teoría de Van Hiele.

**Gráfico N° 2**  
**Grado de Adquisición Niveles Van Hiele para Pregunta 2**

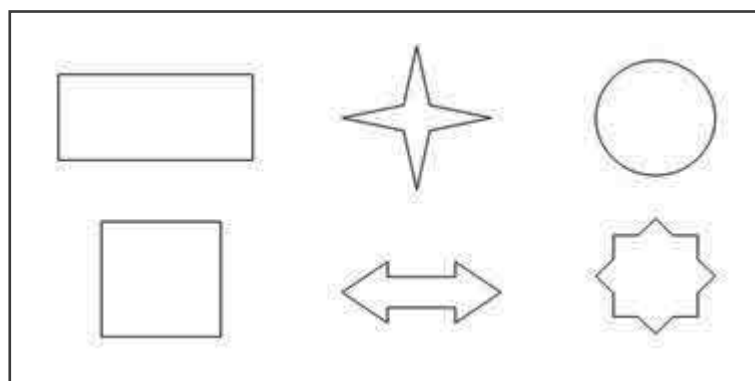


Grado de adquisición promedio:  $G.A(I) = \frac{100 + 100 + 100 + 100}{4} = 100\%$

Según la respuesta entregado por los alumnos, las respuestas promedios corresponden a un Nivel 1, con un grado de adquisición del 100%.

### 3. Determinar todos los ejes de simetría de las figuras.

*Clasificación nivel de razonamiento: 2*



**Tabla N° 5**  
**Descripción Respuesta Pregunta 3**

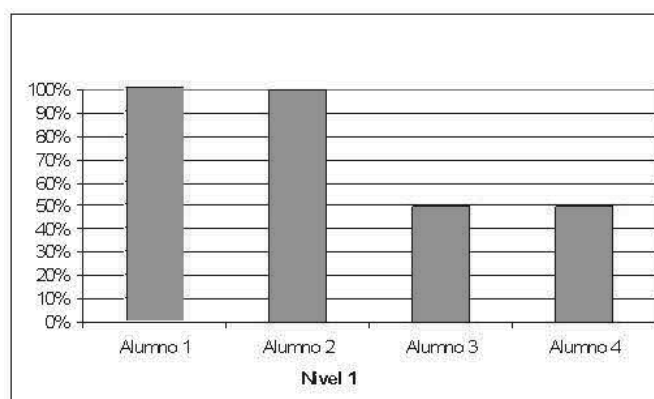
|          | Nivel de Van Hiele | Descripción y Respuesta                                                                                                  | Tipo de Respuesta | Ponderación % |
|----------|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|---------------|
| Alumna 1 | 1                  | La alumna señala que “la solución de esta actividad, fue realizando el doblaje de la hoja y considerando las distancias” | 7                 | 100           |
| Alumno 2 | 1                  | El alumno 2 indica que “la solución de la actividad se realizó mediante el doblaje de la hoja”                           | 7                 | 100           |
| Alumno 2 | 1                  | El alumno 2 indica que “la solución de la actividad se realizó mediante el doblaje de la hoja”                           | 7                 | 100           |
| Alumna 3 | 1                  | La alumna 3 realizó esta actividad doblando la hoja y mirando si coincidían                                              | 4                 | 50            |
| Alumna 4 | 1                  | La alumna 4 señala que “la actividad la realizó doblando la hoja”                                                        | 4                 | 50            |

Los Alumnos 1 y 2 no presentaron problemas para desarrollar las actividades y llegar a los resultados solicitados. En tanto, las alumnas 3 y 4, en el círculo (figura 3) sólo encontraron 4 ejes de simetría, pues después de encontrar estos, no intentaron buscar más, y en la figura 6 también encontraron 4, ya que sólo consideraron las puntas de las estrellas.

La alumna 3, señala el círculo de 4 ejes y se le pregunta ¿Cómo se llaman esos segmentos que corresponden a los ejes de simetría?, a lo que ella responde “no sé”. Después, el profesor traza más diámetros de los que ella tenía trazados y se le pregunta qué pasa si ahora trazamos otros diámetros, a lo que ella responde “¿habrá otro eje de simetría?...” cuando se le pregunta ¿cuántos hay en total?, responde “hartos”.

Al igual que la actividad anterior, la solución se basó en doblar la hoja respecto al eje de simetría, características de un nivel 1 de reconocimiento, según la Teoría de Van Hiele.

**Gráfico N° 3**  
**Grado de Adquisición Niveles Van Hiele para Pregunta 3**



$$\text{Grado de adquisición promedio: } G.A(\text{Nivel } 1) = \frac{100 + 100 + 50 + 50}{4} = 75\%$$

Según la respuesta entregado por los alumnos, las respuestas corresponden a un Nivel 1, con un grado de adquisición del 75%.

**4. A la figura determinada por los puntos (3,2), (7,2), (4,8), realizar una simetría con respecto al eje X y a la figura resultante respecto al eje Y**

*Clasificación nivel de razonamiento: 2*

**Tabla N° 6**  
**Descripción Respuesta Pregunta 4**

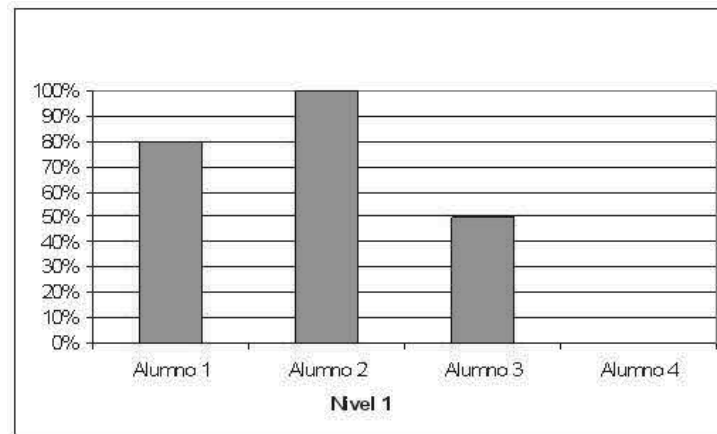
|          | Nivel de Van Hiele | Descripción y Respuesta                                                                                                                                                                                                                   | Tipo de Respuesta | Ponderación % |
|----------|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|---------------|
| Alumna 1 | 1                  | La alumna 1 ubicó correctamente los puntos en el plano cartesiano y “midiendo la distancia de los puntitos al eje” determinó las simetrías.                                                                                               | 6                 | 80            |
| Alumno 2 | 1                  | El alumno 2 llegó al resultado, pero aplicando mal la simetría.                                                                                                                                                                           | 7                 | 100           |
| Alumna 3 | 1                  | La alumna 3 ubicó correctamente los puntos en el plano cartesiano y midiendo la distancia de los puntos al eje determinó las simetrías, diciendo: “por ejemplo aquí A vale (3,-2) y yo medí 3, no... si A vale (3,2) y yo lo medí (3,-2)” | 4                 | 50            |
| Alumna 4 | 1                  | La alumna 4 indica que “no entendí la actividad, por eso no la hice”                                                                                                                                                                      | 1                 | 0             |

La alumna 1 no diferenció los puntos de sus respectivas imágenes (A de A' y de A'', etc.).

El Alumno 2, realizó primero la simetría respecto al eje Y, luego a la figura resultante le aplicó una simetría con respecto al eje X (contrario a lo solicitado). Al igual que las dos actividades anteriores, la solución se basó en doblar la hoja respecto al eje de simetría, características de un nivel 1 de reconocimiento, según la Teoría de Van Hiele.

La alumna 3 no presentó mayores complicaciones para llegar a la solución de esta actividad.

**Gráfico N° 4**  
**Grado de Adquisición Niveles Van Hiele para Pregunta 4**



Grado de adquisición promedio:  $G.A(I) = \frac{80 + 100 + 50 + 0}{4} = 57,5\%$

Según la respuesta entregado por los alumnos, las respuestas corresponden a un Nivel 1, con un grado de adquisición del 57,5%.

### 5. Verificar y justificar si es siempre cierta, en algunos casos o nunca

*Clasificación nivel de razonamiento: 3*

Sea  $R'$  la imagen de  $R$  mediante una simetría y sea  $P$  un punto del eje  $e$

- ¿Qué tipo de triángulo, según sus lados y según sus ángulos, es ?
- Si se coloca  $P$  en otro lugar del eje de simetría, ¿será el triángulo siempre es el mismo?
- Si se coloca  $R$  en otro lugar de la figura y  $R'$  en la posición correspondiente, ¿será el triángulo siempre el mismo?

**Tabla N° 7**  
**Descripción Respuesta Pregunta 5**

|          | Nivel de Van Hiele | Descripción y Respuesta | Tipo de Respuesta | Ponderación % |
|----------|--------------------|-------------------------|-------------------|---------------|
| Alumna 1 | 1                  | Respuesta no codificada | 1                 | 0             |
| Alumno 2 | 1                  | Respuesta no codificada | 1                 | 0             |
| Alumna 3 | 1                  | Respuesta no codificada | 1                 | 0             |
| Alumna 4 | 1                  | Respuesta no codificada | 1                 | 0             |

Esta es una de las preguntas con grandes dificultades para los alumnos y se consideró como no codificada por la casi nula participación de los estudiantes en su desarrollo.

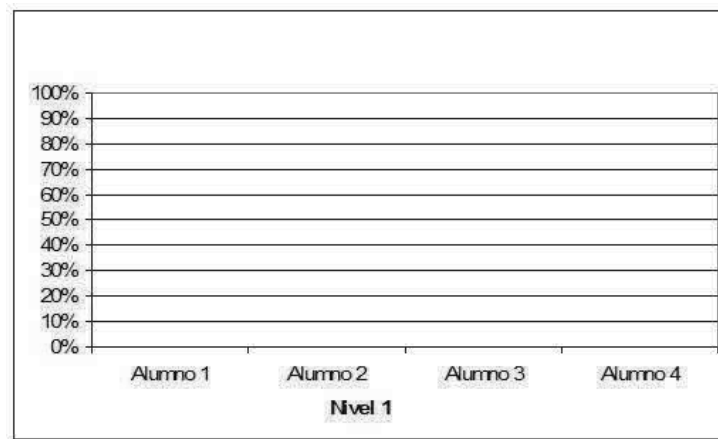
Entre las falencias detectadas se pueden mencionar:

La no comprensión del enunciado, donde después de un tiempo de pensar en lo que debían desarrollar, se debió explicar y dar el comienzo de la actividad dibujando el eje de simetría y ubicando los puntos, además de ir guiado paso a paso al grupo curso en el desarrollo de la tarea. También, no comprender la notación que se les presenta en el enunciado, porque cuando se les preguntó ¿cuál era el triángulo escaleno?, el alumno 3 responde “tiene todos sus lados iguales”.

Para los alumnos cuando cambia de posición R, no cambia la ubicación de R' según corresponda, dejando de lado una de las hipótesis de la actividad (R' la imagen de R mediante una simetría).

Los estudiantes observados no saben las diferentes clasificaciones de los triángulos, según sus lados ni sus ángulos.

**Gráfico N° 5**  
**Grado de Adquisición Niveles Van Hiele para Pregunta 5**



Grado de adquisición promedio:  $G.A(Nivel 1) = \frac{0 + 0 + 0 + 0}{4} = 0\%$

Por la falta de respuesta entregado por los alumnos, esta corresponden a un Nivel 1, con un grado de adquisición del 0%.

### Resultado de las observaciones y entrevistas

Durante la observación de las sesiones y las entrevistas, los alumnos objeto de estudio dejaron de manifiesto:

- Problemas de comprensión de los enunciados de las actividades propuestas, lo que llevaba a depender de la explicación que les diera el profesor o realizar en forma errada la actividad.
- No manejar la clasificación de triángulos según sus lados y ángulo.
- Poco dominio de los contenidos trabajados estudiados, tales como propiedades y definiciones.
- Los estudiantes no usan un lenguaje matemático formal en las notaciones usadas para representar las isometrías.
- No comprender la dependencia de la imagen con su homólogo cuando se efectúa la isometría de simetría, es decir, que no comprende que si el punto varía, su imagen igual varía.
- Sus conclusiones las basan en la manipulación de objetos concretos; es así

como, para determinar simetría de figuras se basan en el doblaje de la hoja con respecto al eje.

- En el tópico simetría, los alumnos exhiben, mayoritariamente, características del nivel 1 de reconocimiento o visualización.

Situaciones detectadas exclusivamente durante las entrevistas:

- No tienen seguridad de lo que están explicando, pues dudan constantemente de lo que dicen y piden que el investigador les confirme la veracidad o falsedad de lo que dicen.
- Escaso análisis de las situaciones planteadas, ya que al no entender las actividades no se esforzaban por comprenderla.
- Problemas para visualizar y representar geométricamente lo indicado en el enunciado.

Situaciones detectadas exclusivamente durante las observaciones:

- Fácil distracción de los estudiantes producto de conversaciones entre compañeros.
- Alta dependencia del profesor para el desarrollo de las actividades, ya que constantemente, señalaban no entender la actividad y preguntar si están haciendo bien la actividad.
- Los alumnos no llevan los materiales para poder trabajar adecuadamente en clases, como cuaderno, regla y transportador, provocando falta de rigurosidad al aplicar las isometrías.

## **Conclusiones**

Luego que los alumnos de Primer Año Medio del Liceo Eleuterio Ramírez de Osorno realizaron las actividades planteadas para el estudio, de la observación participante y las posteriores entrevistas personales, se mencionan las siguientes dificultades que afectan sustancialmente al desarrollo del pensamiento matemático y, específicamente, el pensamiento geométrico.

Dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, se pudo observar que los

alumnos están acostumbrados a que el profesor les explique detalladamente el ejercicio o problema y el cómo llegar a la solución, lo que quita la posibilidad al estudiante de analizar y reflexionar sobre la actividad.

Se suma a lo anterior, los problemas de comprensión lectora que afectan a la coherencia de la situación planteada, la identificación de los datos, el planteamiento de un mecanismo efectivo para encontrar la solución y, finalmente, a la respuesta. Con respecto a esta última, los alumnos no ven la necesidad de verificar si es lógica o no.

Exhiben ausencia de conocimientos de geometría elemental, como la clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos, lo que deja de manifiesto una falencia de significación de estos contenidos de educación básica.

Para la Transformación Isométrica de Simetría existe un predominio del nivel de reconocimiento (nivel uno) según la teoría de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele.

Por lo antes expuesto, se concluye que los estudiantes de Primer Año Medio del Liceo Eleuterio Ramírez de Osorno no presentan adquisición de niveles de pensamiento de geométrico superiores a visualización en la Teoría de Van Hiele, para el contenido de transformaciones isométricas del Programa del Ministerio de Educación.

Frente a estos resultados, se sugiere que, desde la Educación Básica se debe crear e implementar actividades que permitan a los alumnos comprender de mejor forma los conceptos de la geometría euclidiana, acompañado de demostraciones, con la finalidad de desarrollar el razonamiento y la justificación rigurosa.

Este estudio deja abierta la posibilidad a investigadores, para implementar y validar diversas actividades de aprendizaje que permitan a los estudiantes acceder a un nivel superior del pensamiento geométrico. Además, se podría investigar, si la utilización de algún software computacional puede ayudar a este objetivo.

## BIBLIOGRAFÍA

- ALSINA, C.; FORTUNY, J. M. Y PÉREZ, R. (1997). *¿Por qué Geometría?* Colección Educación Matemática en Secundaria N° 5. Síntesis: Madrid, España.
- BARRERA, B. Y CENTENO, M. (2006). Evaluación de Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de la Licenciatura en Educación integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 14, 2, 141-151
- BELTRAMETTI, M.; ESQUIVEL, M. Y FERRARI, E. (2003). Determinación de los niveles de pensamiento geométrico según la Teoría de Van Hiele en estudiantes de Profesorado de Matemática al inicio de un curso de Geometría. *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas*. Resumen D-013. Universidad Nacional del Nordeste.
- CABEZAS, C., ARAVENA, M., CAAMAÑO, C. (2005). Doblado de papel en el primer nivel de razonamiento del modelo didáctico de Van Hiele y su proyección hacia la formalización del Pensamiento Geométrico. *I Seminario de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Los Lagos, Osorno.
- CORBERAN, R.; GUTIERREZ, A.; HUERTA, M.; PASTOR, A.; MARGARIT, J. B., PEÑAS, A.; Y RUÍZ, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Ministerio de Educación y Ciencia. Secretaría General Técnica. Centro de publicaciones. Madrid
- DENIS, L. (1994). Relaciones entre la etapa de desarrollo cognoscitivo y sus niveles Van Hiele de Pensamiento Geométrico. *Revista UNO*. N° 2 (Octubre) 5 - 13.
- GONCALVES, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la Geometría?, *Revista Ciencias de la Educación*, 1, 27, 83-98
- GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1991). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele*. Mimeo.
- JAIME A. (1993). *Aportaciones a la Interpretación y Aplicación del Modelo de Van Hiele: La Enseñanza de las Isometrías del Plano. La Evaluación del Nivel de Razonamiento*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. España.

- JAIME, A. (1994). La enseñanza de las isometrías del plano desde la perspectiva del modelo de Van Hiele. *Revista UNO*, 1, 85-94
- LÓPEZ, A. (2002). *Metodología de la Investigación*. Dirección de Programas Especiales y Asistencia Técnica, Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación, Valparaíso, Chile.
- MAMMANA, V. y VILLANI, V. (1998). *Perspectivas de la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI*.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2004). Proyecto “*Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*”. Bogotá.
- MINEDUC (2004). *Matemática*, Programa de Estudio Primer Año Medio. Segunda Edición, Santiago. Chile.
- ROJAS, C. (2005). Mentefactos y niveles de razonamiento geométrico, según Van Hiele, en alumnas de licenciatura de Pedagogía Infantil. *ZONA PRÓXIMA: Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación Universidad del Norte* N° 6, 82-93.
- SANTALÓ, L. y colaboradores (1994). *Hacia una Didáctica Humanista de la Matemática. Enfoques*. Buenos Aires, Argentina.

Artículo Recibido : 03 de Septiembre de 2010

Artículo Aprobado : 06 de Octubre de 2010