



Elementos de Reemplazo de Tuberías para el Análisis del Flujo Transitorio en Redes de Tuberías. Pipe Replacement Elements for Unsteady Flow Analysis in Pipe Networks.

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historial del artículo:

Recibido

19-06-2018

Aceptado

10-09-2018

Publicado

08-11-2018

Palabras Clave:

Diferencias finitas

Elemento de inercia
concentrada

Elemento de reemplazo
de tuberías (ERT)

Flujo transitorio

Método de las
características

Article history:

Received

19-06-2018

Accepted

10-09-2018

Available

08-11-2018

Keywords:

Finite-differences

Lumped inertia element

Pipe replacement

element (PRE)

Transient flow

Method of

characteristics

Resumen

Los elementos de reemplazo de tuberías (ERTs) son un enfoque útil en el análisis de flujo transitorio en redes de tuberías complejas que contienen tuberías muy cortas que restringen el paso de tiempo computacional en la etapa de discretización. A menudo es necesario reemplazar estos elementos relativamente cortos por una representación matemática que permita remodelar la discretización del dominio, lo que permite utilizar un paso de tiempo mayor, reduciendo así el uso de recursos computacionales. En este artículo se analizan dos enfoques ERT, uno basado en el concepto del elemento de inercia concentrado, y el otro en diferencias finitas explícitas. El enfoque ERT es una herramienta útil que permite reducir el impacto de los tubos cortos en la modelación del flujo transitorio.

Abstract

Pipe replacement elements (PREs) are a useful approach in transient flow analysis in complex pipe networks containing very short pipelines therefore restricting the computational time step in the discretization stage. It is often necessary to replace these relatively short elements by a mathematical representation that allow to reshape the domain discretization, which allows to use larger time step, thus reducing the use of computational resources. In this article two PRE approaches are analysed, one based on the lumped inertia element concept, and the other on explicit finite-differences. PRE approach is a useful tool that allows reducing the impact of short pipes in transient flow modelling.

J. Twyman¹

¹Twyman Ingenieros Consultores, Rancagua, Chile.
john@twyman.cl, teléfono: +56-9-89044770.

1. Introducción

Al analizar el flujo transitorio en redes de tuberías complejas, definidas como un conjunto de tuberías presurizadas conectadas entre sí en forma arbitraria, es necesario aplicar las condiciones de borde en la unión de dos o más tuberías con el requisito de que la magnitud del paso de tiempo (Δt) sea común a todas las tuberías [6], lo cual dificulta la obtención de un número entero de sub-tramos en cada tubería N [4]. Para tratar este problema de discretización, un camino de solución es ajustar la magnitud de la velocidad de la onda forzando un número entero de sub-tramos; aplicar un esquema de interpolación entre los puntos de la malla espacio-tiempo permitiendo así que N tenga un valor no entero [3]; o implementar esquemas de solución menos propensos al efecto del número de Courant o de la relación entre Δx (longitud del sub-tramo) y Δt mediante el uso de estrategias de tipo adaptativo [16, 17]. Dado que el método de las características requiere que cada tubería tenga al menos un sub-tramo ($N = 1$), el paso de tiempo requerido para representar con exactitud a las tuberías más cortas puede ser antieconómico [4]. Por lo tanto, es deseable reemplazar estos tubos cortos por representaciones matemáticas aproximadas que permitan usar un paso de tiempo de magnitud mayor. Tal condición de borde se conoce como pipe replacement element [4] (o PRE, en inglés) o como elemento de reemplazo de tubería (o ERT, en español). A continuación, se describirán dos técnicas ERT útiles para modelar los conductos cortos: el primero en el concepto de elemento de inercia concentrada y el segundo basado en un nuevo enfoque explícito basado en diferencias finitas.

2. Material y métodos

2.1 Ecuaciones que gobiernan el flujo transitorio

Las ecuaciones que gobiernan el flujo transitorio en las tuberías pueden ser descritas completamente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales parciales compuesto por dos ecuaciones. Cuando en una sección de tubería se considera un volumen de control infinitamente corto, tal sistema puede ser representado como [2]:

$$\frac{a^2}{gA} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (2)$$

Donde (1) y (2) corresponden a las ecuaciones de la continuidad y de la dinámica (o momento), respectivamente. Además, $\partial =$

derivada parcial, $H =$ cota piezométrica (m), $a =$ velocidad de la onda (m/s), $g =$ constante de gravedad (m/s^2), $A =$ área de la sección transversal de la tubería (m^2), $Q =$ caudal (m^3/s), $f =$ factor de fricción (Darcy-Weisbach) y $D =$ diámetro interno de la tubería (m). Los subíndices x y t denotan las dimensiones espacial y temporal, respectivamente. Las ecuaciones (1) y (2) toman en cuenta las siguientes suposiciones [10]: (a) el flujo es unidimensional, (b) la tubería está llena de agua durante el transitorio, (c) no se genera el fenómeno de separación de la columna de agua durante el transitorio, (d) tanto la pared de la tubería como el fluido tienen un comportamiento linealmente elástico, y (e) la pérdida de presión por fricción puede ser aproximada como si se tratara de un flujo permanente. Las ecuaciones (1) y (2), junto con las ecuaciones relacionadas con condiciones de borde específicas, permiten describir el fenómeno de propagación de las ondas debido a un evento de golpe de ariete. Sin embargo, al no existir una solución analítica, dichas ecuaciones deben ser resueltas numéricamente con la asistencia del computador [9].

2.2 Velocidad de la onda

La velocidad de la onda puede definirse como [12, 13, 15, 18]:

$$a^2 = \frac{K/\rho}{1 + [(K/E)(D/e)]c_1} \quad (3)$$

Con $K =$ modulo de compresibilidad del agua (Pa); $\rho =$ densidad del agua (Kg/m^3); $e =$ espesor de la pared de la tubería (m); $E =$ modulo de elasticidad de la tubería (Pa), $c_1 =$ factor relacionado con la condición de apoyo de la tubería (adimensional), generalmente igual a $1-u^2$ que corresponde a una tubería anclada en ambos extremos e imposibilitada de moverse longitudinalmente al paso de las ondas de presión [1]. El factor u , conocido como módulo de Poisson (adimensional), corresponde a un valor relacionado con el material constituyente de la tubería.

2.3 Elemento de reemplazo de tubería (ERT)

Algunos autores [4, 5] proponen reemplazar los tubos cortos por expresiones matemáticas que permitan obtener un Δt mayor sin modificar la estabilidad óptima del MC o de sus condiciones de convergencia. Por "corta" se entiende una tubería donde la relación entre su longitud (L) y su velocidad de onda (a) es pequeña en relación con el paso de tiempo utilizado en el análisis [4]. La condición de borde de dos nodos, conocida como ERT, puede ser representada a través del concepto de elemento de inercia concentrada ERT-EIC (**Figura 1**), o alternativamente mediante el uso de diferencias finitas o ERT-DF (**Figura 2**).

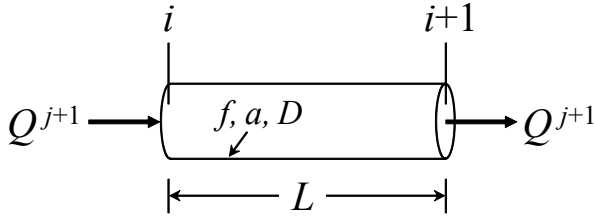


Figura 1 PRE-EIC.

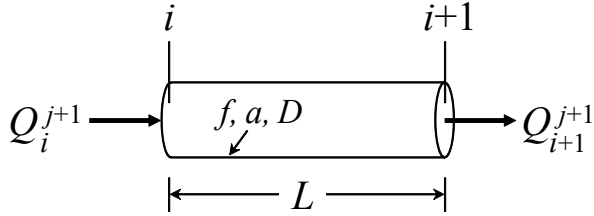


Figura 2 PRE-DF.

2.4 ERT: elemento de inercia concentrada (EIC)

Se puede decir que ERT-EIC consiste en la sustitución de una tubería corta por una ficticia en la que se supone que el flujo entre los nodos i e $i + 1$ es incompresible y puede ser representado por una única variable conocida como Q^{j+1} [4, 7]. Si se cumple esta condición, entonces:

$$H_{P(i)} - H_{P(i+1)} = C_1 + B_1 \cdot Q^{j+1} \quad (4)$$

Con:

$$H_{P(i)} = C_{c(i)} - B_{c(i)} \cdot Q^{j+1} \quad (5)$$

$$H_{P(i+1)} = C_{c(i+1)} + B_{c(i+1)} \cdot Q^{j+1} \quad (6)$$

Reemplazando (5) y (6) en (4) y resolviendo se obtiene:

$$Q^{j+1} = \frac{C - C_1}{B + B_1} \quad (7)$$

Con:

$$C = C_{c(i)} - C_{c(i+1)} \quad (8)$$

$$C_1 = H_{i+1}^j - H_i^j - \frac{2LQ^j}{gA\Delta t} \quad (9)$$

$$B = B_{c(i+1)} + B_{c(i)} \quad (10)$$

$$B_1 = \frac{2L}{gA\Delta t} + \frac{fL|Q^j|}{gDA^2} \quad (11)$$

Siendo L = longitud de la tubería reemplazada (m), A = área de la sección transversal de la tubería (m^2), f = factor de fricción (Darcy), adimensional, H_i^j y H_{i+1}^j = presiones en las secciones i e $i + 1$, respectivamente, en m. Además, $B_{c(i)} = B_{c(i+1)} = a/gA$ (en las secciones i e $i + 1$, respectivamente), en s/m^2 . Debido a que el ERT es una condición de borde de dos nodos, una vez conocido Q^{j+1} es posible calcular las presiones en las secciones de borde i e $i + 1$ a partir de las ecuaciones (5) y (6). La principal desventaja del enfoque ERT-EIC es que supone que el fluido es incompresible, lo cual significa que la onda se transmite instantáneamente a través de la tubería reemplazada. También supone que no existe almacenamiento de agua en la tubería reemplazada [4]. Todas estas simplificaciones reducen el campo de aplicación del enfoque ERT-EIC, siendo conveniente considerar otras alternativas de solución como aquellas basadas en la representación del ERT en base a diferencias finitas.

2.5 ERT: diferencias finitas (DF)

Se presenta una nueva versión para reemplazar las tuberías cortas por ERTs donde se supone que algunas tuberías de la red pueden ser reemplazadas por aproximaciones basadas en diferencias finitas, trabajando la tubería reemplazada como si fuera una condición de borde de dos nodos (Figura 2). En este caso en particular, y según el método de diferencias finitas implícito (MDFI), las ecuaciones de la dinámica y de la continuidad pueden ser representadas de la siguiente forma [14]:

$$d_1 Q_i^{j+1} + d_2 Q_{i+1}^{j+1} - d_3 H_i^{j+1} + d_3 H_{i+1}^{j+1} = -d_4 \quad (12)$$

$$-c_1 Q_i^{j+1} + c_1 Q_{i+1}^{j+1} + c_2 H_i^{j+1} + c_3 H_{i+1}^{j+1} = -c_4 \quad (13)$$

Donde $d_1, d_2, d_3, d_4, c_1, c_2, c_3$ y c_4 son constantes conocidas que dependen principalmente de las variables de estado en el paso de tiempo anterior, de los parámetros de discretización ($\Delta x, \Delta t$), y de los coeficientes de ponderación del MDFI [14]. Por otro lado, a partir de la Figura 2 se tiene:

$$H_i^{j+1} = C_{c(i)} - B_{c(i)} \cdot Q_i^{j+1} \quad (14)$$

$$H_{i+1}^{j+1} = C_{c(i)} + B_{c(i)} \cdot Q_{i+1}^{j+1} \quad (15)$$

Con H_i^{j+1} and H_{i+1}^{j+1} = presión en el instante de tiempo previo en las secciones de tubería i e $i + 1$, respectivamente, en m, Q_i^{j+1} y Q_{i+1}^{j+1} = caudal en el instante de tiempo previo en las secciones i e $i + 1$, respectivamente, en m³/s. Reemplazando las ecuaciones (14) y (15) en las ecuaciones (12) y (13), haciendo un trabajo algebraico y simplificando se obtienen las siguientes expresiones:

$$Q_i^{j+1} = \frac{E_2 E_6 - E_3 E_5}{E_2 E_4 - E_1 E_5} \quad (16)$$

$$Q_{i+1}^{j+1} = \frac{E_3 - E_1 Q_i^{j+1}}{E_2} \quad (17)$$

Donde:

$$E_1 = d_1 + d_3 \cdot B_{c(i)} \quad (18)$$

$$E_2 = d_2 + d_3 \cdot B_{c(i+1)} \quad (19)$$

$$E_3 = -d_4 + d_3 \cdot C_{c(i)} - d_3 C_{c(i+1)} \quad (20)$$

$$E_4 = -c_1 - c_2 \cdot B_{c(i)} \quad (21)$$

$$E_5 = c_1 + c_3 \cdot B_{c(i+1)} \quad (22)$$

$$E_6 = -c_4 - c_2 \cdot C_{c(i)} - c_3 \cdot C_{c(i+1)} \quad (23)$$

Finalmente, conocidos Q_i^{j+1} y Q_{i+1}^{j+1} es posible calcular las presiones a partir de las ecuaciones (16) y (17) aplicadas en las ecuaciones (14) y (15). Como puede apreciarse, la aplicación del enfoque ERT-DF permite obtener una solución totalmente explícita. El enfoque ERT-DF tiene varias ventajas en relación al enfoque ERT-EIC [4]: (a) toma en cuenta el movimiento de la onda a través de la tubería reemplazada, (b) incluye el efecto de almacenamiento de agua, y (c) considera el caudal con inercia y fricción de la tubería reemplazada. El enfoque ERT puede ser también aplicado como parte de un dissipador de energía externo [5, 11], para modelar diferentes tipos de válvulas [7] o como elemento que permite mejorar el desempeño del MC [11].

3. Resultados

3.1 Ejemplo de aplicación 1

La red de tuberías (**Figura 3**) consiste en un estanque ($H_0 = 150$ m), una tubería y una válvula que cierra en $T_c = 2,1$ s [18]. La curva de cierre de la válvula está dada por la ecuación $\tau = (1 - t/T_c)^{1,5}$, donde τ = relación de apertura de la válvula y t = tiempo. La tubería original fue dividida en tres partes permitiendo así la posibilidad de aplicar los enfoques ERT-EIC y ERT-DF sobre la tubería de menor longitud relativa. La forma de discretización de las tuberías y los datos de los nodos se muestra en las **Tablas 1** y **2**, respectivamente, donde N es igual a 21, 3 y 21 para las tuberías 1, 2 y 3, respectivamente, con $\Delta t = 0,01111$ (s) y $C_n = 1,0$ para todas las tuberías.

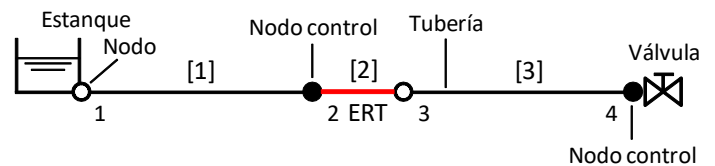


Figura 3 Red ejemplo. ERT en línea de color rojo (adaptado de Wylie y Streeter [18]).

Tabla 1 Discretización de la red.

Tubería número	D (m)	L (m)	Q_0 (m ³ /s)	f	a (m/s)
[1]	0,50	280	0,477	0,018	1.200
[2] ERT	0,50	40	0,477	0,018	1.200
[3]	0,50	280	0,477	0,018	1.200

Tabla 2 Datos de los nodos.

Nodo número	H_0 (m)	Elevación z (m)
1	150,00	0
2	146,99	0
3	146,56	0
4	143,55	0

Las **Figuras 4** y **5** muestran una comparación entre el resultado exacto y el resultado que se obtiene en los nodos 2 y 4 (válvula), respectivamente, cuando el tramo más corto del sistema es reemplazado por un ERT-EIC y ERT-DF. En el primer caso se tiene que la magnitud del primer pico de presión es muy cercano al caso exacto en los nodos 2 y 4 (válvula), aún cuando el resultado obtenido por el ERT-EIC se torna relativamente insatisfactorio debido a que muestra un leve desplazamiento y atenuación respecto de la solución exacta, transcurridos 2,5 (s) del tiempo de simulación. Por otro lado, al reemplazar la tubería 2 por un ERT-

DF se verifica la obtención de una curva de presión vs tiempo sin la aparición de desplazamientos o atenuaciones respecto de la curva exacta. La técnica ERT permite adoptar un nuevo arreglo de discretización al dejar fuera del cálculo de Δt y N a la tubería 2. En el sistema con ERT, los nuevos valores para Δt y N total son 0,078 (s) y 6, respectivamente ($N = 3$ para las tuberías 1 y 3). La **Tabla 3** muestra las presiones extremas registradas en cada escenario de simulación.

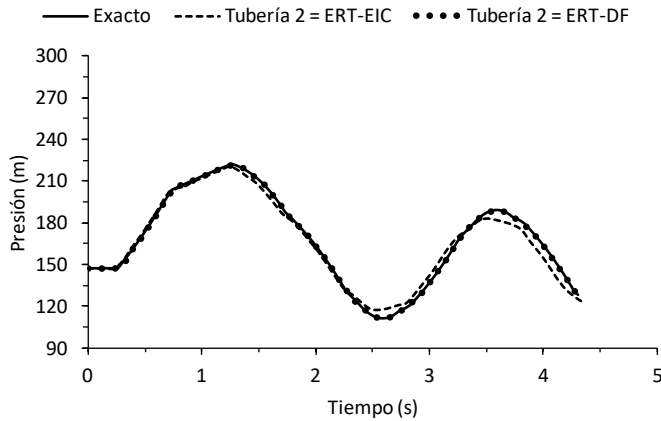


Figura 4 Presión vs tiempo en el nodo 2.

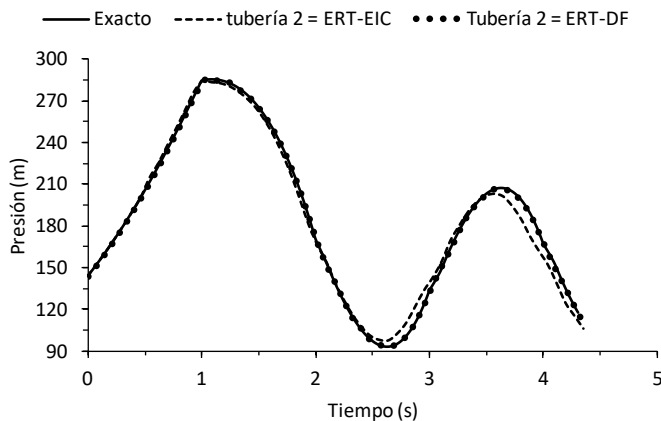


Figura 5 Presión vs tiempo en el nodo 4 (válvula).

Tabla 3 Presiones extremas P (ejemplo 1).

Sistema	P Máxima (m)	t (s)	P Mínima (m)	t (s)
Sin ERT	285,1	1,1	92,8	2,6
Con ERT-EIC	283,8	1,0	97,3	2,6
Con ERT-DF	286,6	1,1	92,8	2,6

Esto permite reducir la cantidad de cálculos en cada paso de tiempo, además de disminuir el tiempo de ejecución desde 1,4 s (exacto) a sólo 0,05 s (sistema con ERT-EIC y ERT-DF). Tanto este ejemplo como el siguiente fueron corridos en un computador PC estándar de 32 bits con 1,66 (GHz) de velocidad de procesamiento.

3.2 Ejemplo de aplicación 2

La red a analizar (**Figura 6**) se compone de un estanque ($H_0 = 70$ m), 27 tuberías, 23 nodos y una válvula que cierra en 5 (s). Todos los nodos tienen una elevación igual a 0 (m). Las **Tablas 4 y 5** muestran los datos de las tuberías y nodos, respectivamente.

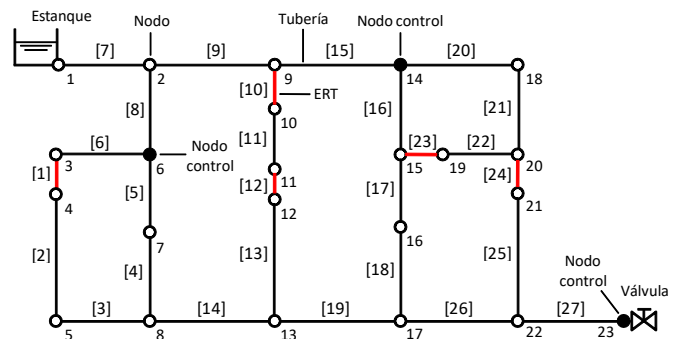


Figura 6 Red ejemplo (ERTs en líneas de color rojo).

Tabla 4 Datos de las tuberías.

Tubería número	D (m)	L (m)	Q_0 (m ³ /s)	f	a (m/s)
[1] ERT	0,20	30	0,01120	0,021	1.200
[2]	0,20	140	0,01120	0,021	1.200
[3]	0,20	140	0,01120	0,021	1.200
[4]	0,20	100	0,01887	0,020	1.200
[5]	0,20	70	0,01887	0,020	1.200
[6]	0,20	140	0,01120	0,021	1.200
[7]	0,20	140	0,07500	0,018	1.200
[8]	0,20	120	0,03007	0,019	1.200
[9]	0,20	140	0,04493	0,018	1.200
[10] ERT	0,20	30	0,00864	0,022	1.200
[11]	0,20	115	0,00864	0,022	1.200
[12] ERT	0,20	30	0,00864	0,022	1.200
[13]	0,20	115	0,00864	0,022	1.200
[14]	0,20	140	0,03007	0,019	1.200
[15]	0,20	120	0,03628	0,019	1.200
[16]	0,20	120	0,01878	0,020	1.200

Tabla 4 (cont.) Datos de las tuberías.

Tubería número	D (m)	L (m)	Q_0 (m ³ /s)	f	a (m/s)
[17]	0,20	85	0,00245	0,029	1.200
[18]	0,20	85	0,00245	0,029	1.200
[19]	0,20	120	0,03872	0,019	1.200
[20]	0,20	140	0,01750	0,020	1.200
[21]	0,20	120	0,01750	0,020	1.200
[22]	0,20	110	0,01633	0,020	1.200
[23] ERT	0,20	30	0,01633	0,020	1.200
[24] ERT	0,20	30	0,03383	0,019	1.200
[25]	0,20	140	0,03383	0,019	1.200
[26]	0,20	140	0,03117	0,019	1.200
[27]	0,20	140	0,07500	0,018	1.200

El estado inicial de flujo permanente fue calculado usando el programa EPANET [8]. Las **Figuras 7, 8 y 9** muestran las curvas de presión vs tiempo en los nodos 6, 14 y 23 (válvula) cuando el flujo transitorio es resuelto mediante el MC con $C_n = 1,0$ en todas las tuberías (resultado exacto) y mediante el MC cuando las tuberías 1, 10, 12, 23 y 24 son reemplazadas por ERTs basados en los enfoques EIC y DF.

Tabla 5 Datos de los nodos.

Nodo número	H_0 (m)	Nodo número	H_0 (m)
1	70,00	13	64,91
2	66,37	14	64,27
3	65,74	15	64,05
4	65,72	16	64,04
5	65,63	17	64,04
6	65,84	18	64,04
7	65,71	19	64,01
8	65,53	20	63,85
9	65,03	21	63,69
10	65,02	22	62,91
11	64,97	23	59,28
12	64,96	---	---

Tal como se verificó en el ejemplo anterior, el resultado obtenido al reemplazar algunas tuberías por ERT-EIC muestra curvas de

presión vs tiempo donde los tres primeros picos de presión son muy cercanos a los picos exactos, pese a que pasados 10 (s) del tiempo de simulación estos pasan a mostrar un leve desplazamiento de sus curvas respecto de la curva exacta (ver **Figuras 7, 8 y 9**). En contraste, el reemplazo de las tuberías cortas por un ERT-DF permitió conseguir un resultado cercano al exacto, sin atenuaciones ni desplazamiento de las curvas respecto de la curva exacta. Además, el uso de ERTs permitió reducir la cantidad total de sub-tramos (N total), la cual pasó desde 285 (resultado exacto) a 117 (resultado con ERT-EIC y ERT-DF).

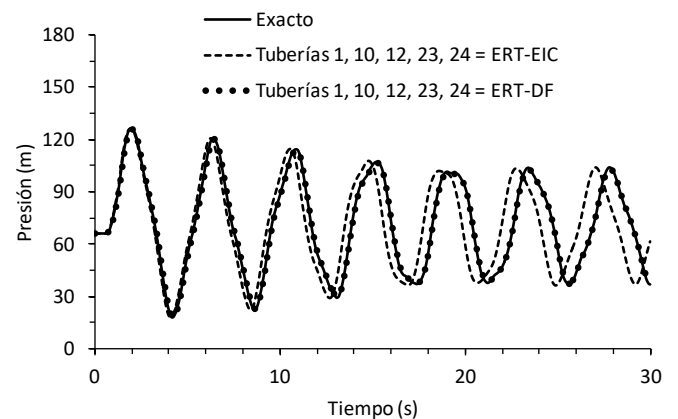


Figura 7 Curvas de presión vs tiempo en el nodo 6.

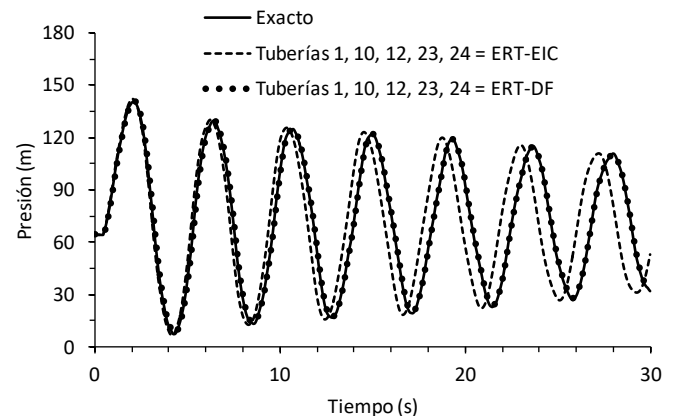


Figura 8 Curvas de presión vs tiempo en el nodo 14.

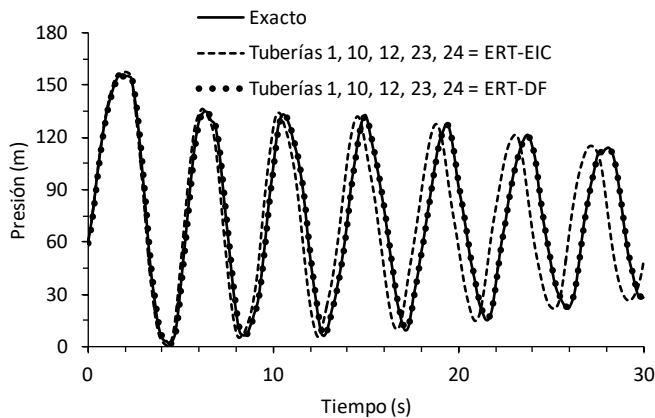


Figura 9 Curvas de presión vs tiempo en la válvula.

La **Tabla 6** muestra las presiones extremas registradas en cada escenario de simulación. El uso de los ERTs permitió incrementar la magnitud del paso de tiempo, la cual ahora es calculada a partir de las tuberías con mayor longitud relativa, pasando de $\Delta t = 0,008$ s (resultado exacto, sin ERTs) a $\Delta t = 0,019$ s (resultado con ERTs). Esta menor cantidad de N y mayor valor de Δt hizo que el tiempo de ejecución disminuyera significativamente, de 104,4 s (resultado exacto, sin ERTs) a 29,3 s (tramos reemplazados con ERT-EIC) y a 30,2 s (tramos reemplazados con ERT-DF).

Tabla 6 Presiones extremas P (ejemplo 2).

Sistema	P Máxima (m)	t (s)	P Mínima P (m)	t (s)
Sin ERT	155,4	2,2	1,5	4,4
Con ERT-EIC	157,7	2,1	0,6	4,3
Con ERT-DF	155,4	2,1	1,7	4,4

4. Conclusiones

Se concluye que los ERTs permiten acceder a mayores Δt 's al permitir que la discretización espacio-temporal, basada en una cuadrícula rectangular tradicional, pueda ser implementada dejando de lado aquellas tuberías de menor longitud relativa. El enfoque original basado en el ERT-DF es el que muestra un mejor desempeño numérico, siendo muy fácil de programar e implementar en el código del programa de golpe de ariete, ya que prácticamente consiste en resolver un sistema de ecuaciones explícito de tamaño 2X2 (ecuaciones 16 y 17). El enfoque ERT-DF puede ser aplicado sin problemas en redes simples o complejas, sin que la conectividad entre tramos y nodos constituya un impedimento, y tampoco la cantidad de tramos que puedan estar conectados a un nodo cualquiera. Dadas las características

numéricas del ERT-DF, este podría ser utilizado no solo para reemplazar a las tuberías cortas, sino que también para reemplazar aquellas tuberías donde el número de Courant es menor que 1,0, reduciendo con esto el efecto de atenuación numérica. El ERT-DF también podría ser utilizado para reemplazar los sub-tramos internos en aquellas tuberías donde $C_n < 1,0$. Esto requeriría re-discretizar la tubería usando $(N - 1)$ sub-tramos con $C_n = 1,0$ ($\Delta x = a \cdot \Delta t$) aptos de ser resueltos mediante el MC. Los sub-tramos restantes, de longitud igual a $\Delta x^* = L - [N - 1] \cdot \Delta x$, pueden ser resueltos aplicando el ERT-DF mostrado en este artículo. Finalmente, un aspecto a mejorar en el algoritmo ERT se refiere a la posibilidad de reemplazar una o más tuberías cortas conectadas mediante un nodo común. Esto debido a que el algoritmo actual sólo permite reemplazar tuberías cortas conectadas a estanques u otros elementos de almacenamiento tales como los disipadores de energía externos (sigla en Inglés: EED), o reemplazar tuberías cortas aisladas ubicadas en diferentes partes de la red sin algún nodo de unión común con otras tuberías cortas.

5. Referencias

- [1] Chaudhry M.H. (1979). Applied hydraulic transients, p. 266. New York: Van Nostrand Reinhold. * p. 36.
- [2] Chaudhry M.H. (1982). Numerical solution of transient-flow equations. Proceedings Speciality Conference Hydraulics Division (pp. 633-656). Jackson: ASCE.
- [3] Ghidaoui M.S., Karney B.W., McInnis D.A. (1998). Energy estimates for discretization errors in waterhammer problems. Journal of Hydraulic Engineering, 124(4): 384-393.
- [4] Karney B.W. (1984). Analysis of fluids transients in large distribution networks. PhD. Thesis. Vancouver: University of British Columbia. <http://hdl.handle.net/2429/25312>
- [5] Karney B.W., McInnis D. (1992). Efficient calculation of transient flow in simple pipe networks. Journal of Hydraulic Engineering, 118(7): 1014-1030.
- [6] Karney B.W., Ghidaoui M.S. (1997). Flexible discretization algorithm for fixed-grid MOC in pipelines. Journal of Hydraulic Engineering, 123(11): 1004-1011.
- [7] McInnis D. A., Karney B.W., Axworthy D.H. (1997). Efficient valve representation in fixed-grid characteristics method. Journal of Hydraulic Engineering, 123(8): 709-718.
- [8] Rossman L.A. (1993). User's manual for EPANET. Drinking Water Resources Division. Cincinnati: USEPA.
- [9] Salgado R., Twyman C., Twyman J. (1992, 8-12 Septiembre). Desarrollo de un algoritmo híbrido para el análisis del escurrimiento impermanente rápido en redes de tuberías a presión. XV Congreso Latinoamericano de Hidráulica (pp. 483-493). Cartagena: IAHR.



- [10] Simpson A.R., Wu Z.Y. (1997). Computer modelling of hydraulic transients in pipe networks and the associated design criteria. International Congress on Modelling and Simulations, Modelling and Simulations Society of Australia. Hobart: MODSIM.
- [11] Twyman J., Twyman C., Salgado R. (1997, 22-24 Octubre). Optimización del método de las características para el análisis del golpe de ariete en redes de tuberías. XIII Congreso Nacional de Ingeniería Hidráulica (pp. 53-62). Santiago: Universidad de Santiago USACH.
- [12] Twyman J. (2016a). Wave speed calculation for water hammer analysis. Obras y Proyectos, UCSC. 20: 86-92. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-28132016000200007>
- [13] Twyman J. (2016b, 26-30 Septiembre). Golpe de Ariete en una Red de Distribución de Agua. XXVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica (pp. 10). Lima: IAHR (Spain Water and IWHR China).
- [14] Twyman J. (2017c). Métodos para el análisis del flujo transiente en redes de tuberías, p. 137. Beau Bassin: Editorial Académica Española. p* 53.
- [15] Wan W., Mao X. (2016). Shock wave speed and transient response of PE pipe with steel-mesh reinforcement. Shock and Vibration, Volume 2016 (2016). Article ID 8705031. <http://dx.doi.org/10.1155/2016/8705031>
- [16] Wan W., Huang W. (2018). Water hammer simulation of a series pipe system using the MacCormack time marching scheme. Acta Mechanica, 229(7): 3143-3160.
- [17] Wang P., Yu B., Han D., Li J., Sun D., Xiang Y., Wang L. (2018). Adaptive implicit finite difference method for natural gas pipeline transient flow. Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP Energies nouvelles, 73(21): 1-11.
- [18] Wylie E.B., Streeter V.L. (1978). Fluid transients, p. 206. New York: McGraw-Hill. Int. Book Co. * p. 38-41.