

# Análisis del flujo transitorio usando esquemas numéricos explícitos e implícitos en una malla espacio-tiempo no uniforme.

## Transient flow analysis using explicit and implicit numerical schemes in a non-uniform time-space mesh.

### INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

#### Historial del artículo:

##### Recibido

04-12-2018

##### Aceptado

08-04-2019

##### Publicado

29-04-2019

##### Palabras Clave:

Golpe de ariete

Método de diferencias

finitas implícito (MDFI)

Método de las  
características (MC)

Red de tuberías

#### Article history:

##### Received

04-12-2018

##### Accepted

08-04-2019

##### Available

29-04-2019

##### Keywords:

Water hammer

Implicit finite-difference  
method (IFDM)

Method of  
characteristics (MOC)

Pipe network

### Resumen

El método de características (MC) es un algoritmo útil y eficaz para la modelación del flujo transitorio en todos los tipos de sistemas, constituyendo una herramienta atractiva dado su nivel de precisión numérica y estabilidad. Sin embargo, surge un problema cuando es necesario discretizar la red para cumplir con Courant en todas las tuberías, una situación que puede ser crítica cuando la red tiene uno o más tramos de longitud relativamente corta donde puede ser imposible cumplir con Courant, reduciendo el tamaño del paso de tiempo con riesgo de ralentizar el tiempo de ejecución del algoritmo de golpe de ariete. Esta situación puede volverse crítica cuando la red tiene uno o más conductos de longitud relativamente corta, donde puede ser imposible cumplir con Courant. Es posible resolver este problema utilizando métodos numéricos que funcionan con discretizaciones no uniformes y flexibles, esto junto con expresiones matemáticas que permiten abordar de manera eficiente el problema de las tuberías excesivamente cortas, lo que permite calcular las variables de estado transitorias sin la necesidad de cumplir con Courant. Se concluye que las metodologías con discretización no uniforme y flexible son fáciles de programar y permiten evitar el efecto de Courant, permitiendo obtener resultados comparables al resultado exacto sin incurrir en un gasto significativo de recursos computacionales (memoria y tiempo de ejecución)

### Abstract

Method of characteristics (MOC) is a useful and effective algorithm for transient flow modelling in all types of systems, constituting an attractive tool given its level of numerical accuracy and stability. However, a problem arises when it is necessary to discretize the network in order to comply with Courant in all pipelines, a situation that can become critical when the network has one or more pipes of relative short length that can reduce the size of the computational time step, with the risk of slowing down the execution time of the water hammer algorithm. This situation can become critical when the network has one or more pipes of relative short length, where it may become impossible to comply with Courant. It is possible to solve this problem using numerical methods that work with non-uniform and flexible discretizations, this together with mathematical expressions that allow efficiently address the problem of excessively short pipes, allow calculating the transitory state variables without the need to comply with Courant. It is concluded that the methodologies with non-uniform and flexible discretization are easy to program and allow avoid the Courant effect, which allows obtaining results comparable to the exact result without incurring a significant expenditure of computational resources (memory and execution time).

**J. Twyman<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Twyman Ingenieros Consultores, Rancagua, Chile.  
john@twyman.cl, teléfono: +56-9-89044770.

## 1. Introducción

El método de las características (MC) es un algoritmo numérico ideado para simular y/o analizar los efectos transitorios en un sistema hidráulico a presión, el cual puede tener una forma ramificada, mallada o mixta. En la fase de diseño el MC permite incorporar al sistema diferentes dispositivos de protección de manera que las oscilaciones de presión generadas por diferentes maniobras de los elementos del sistema se mantengan dentro de determinados límites previamente fijados. Por otra parte, en la fase de verificación el MC permite visualizar los efectos transitorios al efectuar maniobras en una instalación previamente diseñada. Sin embargo, pese a estas ventajas, el MC es poco flexible frente al problema de discretización que se presenta cuando se debe resolver el flujo transitorio en redes que poseen tuberías con menor longitud relativa y/o distinto material, lo cual le resta versatilidad y mayor campo de aplicación. Este punto es comprobado al comparar el desempeño numérico del MC con dos algoritmos de solución con similar nivel de precisión aunque con un menor gasto de recursos computacionales en ciertos casos.

## 2. Material y métodos

### 2.1 Ecuaciones que gobiernan el flujo transitorio

El flujo transitorio en tuberías puede describirse según (Nerella y Rathnam, 2015):

$$gA_p \frac{\partial H}{\partial t} + a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$gA_p \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f}{2DA_p} Q|Q| = 0 \quad (2)$$

Donde (1) corresponde a la ecuación de continuidad y (2) a la ecuación de conservación del momentum, con  $g$  = constante de gravedad ( $m/s^2$ ),  $A_p$  = sección transversal de la tubería ( $m^2$ ),  $H$  = cota piezométrica (m),  $Q$  = caudal ( $m^3/s$ ),  $f$  = factor de fricción de la tubería (Darcy, adimensional) y  $D$  = diámetro interno de la tubería (m). Además,  $a$  = velocidad de la onda ( $m/s$ ) =  $\sqrt{K/\rho}/\sqrt{1+K/E \cdot D/e \cdot \psi}$ , siendo  $K$  = módulo de compresibilidad del fluido ( $kg/ms^2$ ),  $\rho$  = densidad del fluido ( $kg/m^3$ ),  $E$  = módulo de elasticidad del material componente de la tubería ( $kg/ms^2$ ),  $e$  = espesor de la pared de la tubería (m) y  $\psi$  = factor que depende de la condición de apoyo de la tubería (adimensional) (Twyman, 2016b, 2017a, b; Wylie y Streeter, 1978). Las variables  $x$  y  $t$  denotan espacio y tiempo.

### 2.2 Discretización de la red

El MC tradicional debe cumplir con la denominada condición de Courant ( $C_r$ ) que establece que  $C_r = a \cdot \Delta t = (L_p/N) = \Delta x$  (m), con  $\Delta t$  = paso de tiempo (s),  $L_p$  = longitud de la tubería (m),  $N$  = cantidad de sub-tramos en la que está dividida la tubería (=  $L_p/\Delta x$ ) adimensional, y  $\Delta x$  = longitud del sub-tramo (m). Siendo que la mayoría de los sistemas se componen de tuberías con diferentes  $L_p$  y  $a$ , se torna imposible satisfacer exactamente  $C_r$  en todas las tuberías utilizando un valor común (y razonable) de  $\Delta t$  (Karney y Ghidaoui, 1997), generándose con esto un problema de discretización (Boulos et al., 2005). Existen tres formas generales de lidiar con este problema: (1) realizar ajustes hasta conseguir que  $C_r = 1,0$ , ya sea modificando  $a$  en una proporción menor o igual a  $\pm 15\%$  (Wylie y Streeter, 1978; Twyman, 2016a), o modificando  $L_p$  hasta un valor de referencia (Wood, 2005); (2) reemplazar los tramos cortos por elementos de reemplazo (Wylie y Streeter, 1978); o (3) aplicar esquemas más precisos que el MC cuyo desempeño dependa en menor medida de  $C_r$ , y por ende, de la discretización adoptada, como por ejemplo (Watt et al., 1980; Chaudhry, 1982; Salgado et al., 1993a, b; Twyman et al., 1997; Samani y Khayatzadeh, 2002; Izquierdo et al., 2004a, b; Wood et al., 2005; Chen et al., 2013): métodos de diferencias finitas (de tipo explícito o implícito, en primer orden o superior), métodos de elementos finitos, métodos híbridos o multidireccionales, método de elementos de borde (o de contorno), métodos espectrales, pseudo-espectrales o súper espectrales, Método de la Onda, etcétera.

### 2.3 Método de las características (MC)

En este método las ecuaciones (1) y (2), expresadas en forma de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, son transformadas en ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden ser expresadas como dos ecuaciones de compatibilidad denominadas líneas características  $C^+$  y  $C^-$  (Figura 1), cuya forma es la siguiente:

$$\frac{Q_P^{t+\Delta t} - Q_L}{A_p \Delta t} + \frac{g}{a} \frac{H_P^{t+\Delta t} - H_L}{\Delta t} + \frac{f Q_L |Q_L|}{2DA_p^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{Q_P^{t+\Delta t} - Q_R}{A_p \Delta t} - \frac{g}{a} \frac{H_P^{t+\Delta t} - H_R}{\Delta t} + \frac{f Q_R |Q_R|}{2DA_p^2} = 0 \quad (4)$$

Escogiendo un  $\Delta t$  tal que los puntos  $L$  y  $R$  queden cercanos a los nudos  $i-1$  e  $i+1$ , respectivamente, es posible aplicar un procedimiento de interpolación en orden a calcular los valores de  $Q$  y  $H$  en los puntos  $L$  y  $R$ , con lo cual se tiene lo siguiente:

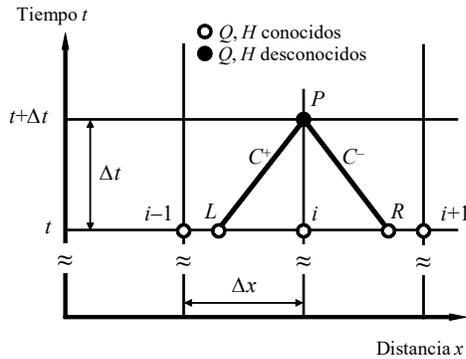


Figura 1 Malla del MC.

## 2.4 Método de diferencias finitas implícito. (MDFI)

El MDFI es usado para resolver el flujo transitorio cuando es necesario adoptar pasos de tiempo que no están restringidos por la condición de Courant (Arfaie y Anderson, 1991). En el MDFI, las incógnitas  $H$  y  $Q$  pueden ser expresadas en términos de valores desconocidos pertenecientes a nudos cercanos dentro de la malla  $x-t$  (Chaudhry, 1982). De esta forma, ecuaciones representativas del sistema completo pueden ser resueltas simultáneamente. Tomando en cuenta la **Figura 2**, puede suponerse que las condiciones en  $t$  son conocidas y se requiere calcular los valores en el tiempo  $t + \Delta t$ . Al reemplazar las derivadas parciales de las ecuaciones (1) y (2) por aproximaciones en diferencias finitas y simplificando (Chaudhry, 1982), se obtiene lo siguiente cuando los factores de ponderación del MDFI son iguales a 0,5 ( $i = 2, \dots, N - 1$ ):

$$Q_L = Q_i^t + C_r(Q_{i-1}^t - Q_i^t) \quad (5)$$

$$Q_R = Q_i^t + C_r(Q_{i+1}^t - Q_i^t) \quad (6)$$

$$H_L = H_i^t + C_r(H_{i-1}^t - H_i^t) \quad (7)$$

$$H_R = H_i^t + C_r(H_{i+1}^t - H_i^t) \quad (8)$$

$$d_1 Q_i^{t+\Delta t} + d_2 Q_{i+1}^{t+\Delta t} - d_3 H_i^{t+\Delta t} + d_3 H_{i+1}^{t+\Delta t} = -d_4 \quad (11)$$

$$-c_1 Q_i^{t+\Delta t} + c_1 Q_{i+1}^{t+\Delta t} + c_2 H_i^{t+\Delta t} + c_3 H_{i+1}^{t+\Delta t} = -c_4 \quad (12)$$

Con  $i$  variando entre los nudos internos  $i = 2$  e  $i = N$ . Reemplazando las ecuaciones anteriores en (3) y (4), y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se obtiene:

$$Q_P^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \left[ (Q_L + Q_R) + \frac{gA_P}{a} (H_L - H_R) - \frac{f\Delta t}{2D} (Q_L|Q_L| + Q_R|Q_R|) \right] \quad (9)$$

$$H_P^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{gA_P} (Q_L - Q_R) + (H_L + H_R) - \frac{a}{gA_P} \frac{f\Delta t}{2D} (Q_L|Q_L| - Q_R|Q_R|) \right] \quad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) son válidas para calcular las variables de estado  $Q_P^{t+\Delta t}$  y  $H_P^{t+\Delta t}$  en los nudos internos de la tubería. Cuando  $C_r < 1,0$ , el MC queda impedido de capturar los frentes de onda abruptos, entregando una solución suave o con amortiguaciones numéricas de tipo artificial (Goldberg y Wylie, 1983), todo lo cual tiende a modificar la física del problema y transformar en forma significativa las ecuaciones que gobiernan el flujo transitorio (Ghidaoui y Karney, 1994). Cuando  $C_r = 1,0$  el MC entrega un resultado numéricamente exacto al capturar fielmente los frentes de onda abruptos, sin suavizarlos ni amortiguarlos numérica o artificialmente.

Donde:

$$d_1 = 1 - \frac{\Delta t(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{2A_P\Delta x} + \frac{f\Delta t|Q_i^t + Q_{i+1}^t|}{4DA_P} \quad (13)$$

$$d_2 = 1 + \frac{\Delta t(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{2A_P\Delta x} + \frac{f\Delta t|Q_i^t + Q_{i+1}^t|}{4DA_P} \quad (14)$$

$$d_3 = \frac{gA_P\Delta t}{\Delta x} \quad (15)$$

$$d_4 = \frac{gA_P\Delta t(H_{i+1}^t - H_i^t)}{\Delta x} - (Q_i^t + Q_{i+1}^t) + \frac{\Delta t}{2A_P\Delta x} (Q_i^t + Q_{i+1}^t)[Q_{i+1}^t - Q_i^t] \quad (16)$$

$$c_1 = \frac{a^2}{2\Delta x} \quad (17)$$

$$c_2 = \frac{gA_P}{2\Delta t} - \frac{g(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{4\Delta x} \quad (18)$$

$$c_3 = \frac{gA_P}{2\Delta t} + \frac{g(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{4\Delta x} \quad (19)$$

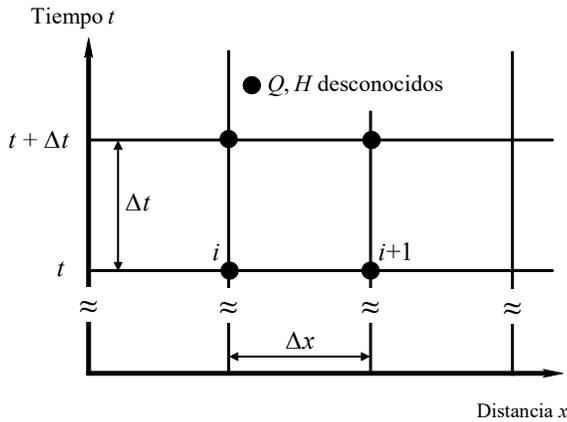


Figura 2 Malla del MDFI.

$$c_4 = \left( \frac{-gA_p}{2\Delta t} \right) [H_{i+1}^t + H_i^t] + \frac{g}{4\Delta x} (Q_i^t + Q_{i+1}^t) [H_{i+1}^t - H_i^t] + \frac{a^2}{2\Delta x} [Q_{i+1}^t - Q_i^t] \quad (20)$$

Con:  $Q_i^t$  y  $Q_{i+1}^t$ ,  $H_i^t$  y  $H_{i+1}^t$  caudales y cotas piezométricas en los nudos internos  $i$  e  $i+1$  en el instante previo  $t$ . En las ecuaciones (11) y (12) existen 4 incógnitas ( $Q_i^{t+\Delta t}$  y  $Q_{i+1}^{t+\Delta t}$ ,  $H_i^{t+\Delta t}$  y  $H_{i+1}^{t+\Delta t}$ ), por lo que se requieren 4 ecuaciones para obtener una solución única. Hay dos ecuaciones adicionales que corresponden a las secciones adyacentes  $i-1$  e  $i+1$ . Si el sistema es dividido en  $N$  sub-tramos, entonces habrá  $N+1$  secciones o puntos. Debido a que existen dos incógnitas por cada sección de tubería ( $Q_i^{t+\Delta t}$  y  $H_i^{t+\Delta t}$ ) ( $i = 1, 2, \dots, N+1$ ), habrá entonces  $2 \cdot (N+1)$  incógnitas, para lo cual la solución única requerirá una cantidad acorde de ecuaciones. De estas,  $2N$  son provistas por las ecuaciones (11) y (12) para cada sub-tramo, y las restantes dos ecuaciones son provistas por las condiciones de borde en los extremos de la tubería, cuyo tratamiento será abordado en el siguiente apartado en el contexto del MC. El MDFI posee varias ventajas: no requiere interpolar, es incondicionalmente estable y puede funcionar con  $C_r \neq 1,0$ . Tiene como desventaja su propensión a mostrar oscilaciones espurias en transitorios muy rápidos y dispersión numérica en ciertos casos; y además, el paso de tiempo no puede ser incrementado en forma arbitraria porque esto podría afectar la validez de reemplazar las derivadas parciales por aproximaciones en diferencias finitas (Chaudhry, 1982).

## 2.5 Tratamiento de las condiciones de borde

Karney (1984), Karney y McInnis (1992), Salgado et al. (1993a, b), Twyman (2017b) y Nault et al. (2018) presentan, en el contexto del MC, una ecuación válida para modelar distintas condiciones de borde que mantienen la continuidad de los caudales a nivel nodal y la unicidad de la cota piezométrica en cada nudo. En una red con nudos simples, estanques y válvulas, las siguientes ecuaciones pueden ser aplicadas para calcular  $H_p^{t+\Delta t}$  en los nudos de borde ( $1$  y  $N+1$ ).

**Nudo simple.** Es aquel que conecta sólo tuberías, excluyendo bombas, estanques, etcétera, es decir, sólo hay tubos que llegan y otros que salen del nudo (Figura 3), además de consumos o aportes conocidos ( $Q_{ext}$ ). Si no hay pérdida de carga en el nudo, entonces la cota piezométrica puede ser representada por un valor único  $H_p^{t+\Delta t}$ , cuya forma es:

$$H_p^{t+\Delta t} = C_c - B_c \cdot Q_{ext} \quad (21)$$

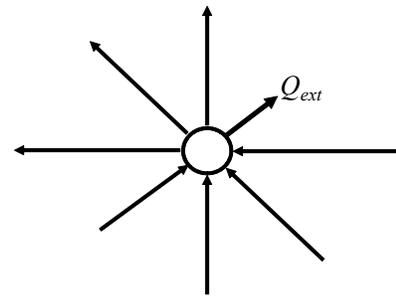


Figura 3 Esquema de un nudo simple (adaptado de Karney, 1984).

Con  $C_c$  y  $B_c$  constantes conocidas que dependen de valores calculados en el paso de tiempo anterior.

**Estanque lineal.** En este caso se plantea una ecuación similar a la del nudo simple (Figura 4):

$$H_p^{t+\Delta t} = C_c - B_c \cdot \left[ \frac{C_c - H_0 - B_0 \cdot Q_e}{B_c + B_0} \right] \quad (22)$$

Donde  $H_0$  = cota piezométrica del estanque,  $B_0 = \Delta t / 2A_r$  con  $A_r$  = sección transversal del estanque y  $Q_e$  = consumo nodal del paso de tiempo anterior. Se verifica que la ecuación (22) es general, porque cuando  $A_r \rightarrow \infty$   $B_0 \rightarrow 0$ , con lo cual se obtiene  $H_p^{t+\Delta t} = H_0$ , que corresponde a la presión en el estanque de cota o nivel constante.

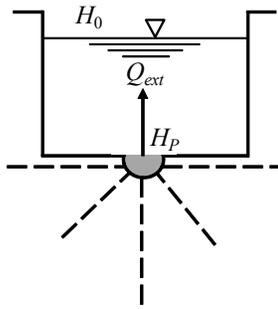


Figura 4 Esquema de un estanque lineal (adaptado de Karney, 1984).

**Válvula de cierre gradual.** En este caso se considera un elemento con dos nudos (Figura 5), donde:

$$H_p^{t+\Delta t} = C_c - B_c \cdot s \cdot \tau \cdot E_s \cdot \sqrt{s(H_p^t - H_b)} \quad (23)$$

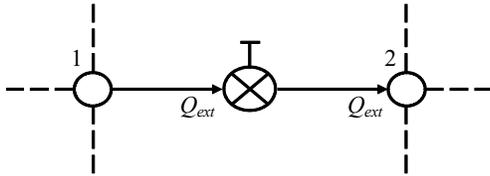


Figura 5 Esquema de la válvula (adaptado de Karney, 1984).

Con  $s$  = signo del caudal externo;  $\tau$  y  $E_s$  = parámetros asociados a la válvula,  $H_p^t$  = cota piezométrica en el nudo  $P$  en el tiempo  $t$  y  $H_b$  = cota piezométrica conocida cuando la válvula descarga a la atmósfera o cuando existe un orificio a la entrada de un estanque de cota constante. Las ecuaciones (21), (22) y (23) permiten que una red compleja, compuesta por nudos simples, estanques y válvulas, pueda ser desacoplada o desarticulada en cada nudo de borde, siempre y cuando se agregue como condición de borde una ecuación de compatibilidad (las ecuaciones 21, 22 o 23, dependiendo del caso) que restituya la continuidad de caudales y la unicidad de la cota piezométrica (Salgado, 1992; Twyman et al., 1997; Twyman, 2016a). Esta propiedad, que será utilizada en todos los esquemas numéricos presentados en este trabajo, permite simplificar notablemente el tratamiento de los nudos de borde en redes con conectividad compleja, aunque también permite resolver la red tubería-a-tubería, quedando estas susceptibles de ser resueltas mediante distintos métodos numéricos (Salgado et al., 1993b; Twyman et al., 1997). En este caso se adopta al MC como esquema de solución de los nudos de borde debido a que corresponde al camino más fácil de implementar, tal como ha sido reportado por Chaudhry (1979), Karney (1984), Chaudhry y Hussaini (1985), Karney y McInnis (1992), y Twyman (2017b).

## 2.6 Solución usando el MDFI

En el contexto del MDFI, es posible unir las ecuaciones de los nudos de borde (21), (22) o (23) y las ecuaciones (11) y (12), correspondientes a cada sub-tramo de la tubería, en forma matricial, tal como sigue:

$$A \cdot y = b \quad (24)$$

Donde  $y$  es un vector que incluye las variables  $Q_i^{t+\Delta t}$  y  $H_i^{t+\Delta t}$ , con  $i = 1, 2, \dots, N + 1$ ,  $b$  es un vector con los coeficientes  $c_4$  y  $d_4$  para cada nudo interno y para las condiciones de borde impuestas en los nudos de borde aguas arriba y aguas abajo de la tubería, y  $A$  es una matriz que incluye los coeficientes  $d_1, d_2, d_3, c_1, c_2$  y  $c_3$ . La matriz  $A$  puede resolverse en forma rápida y eficiente mediante el algoritmo de barrido doble, conocido también como algoritmo de Thomas (Twyman, 2017a). Para efectos ilustrativos, se considerará un sistema compuesto por un estanque de cota constante (aguas arriba), una tubería y una válvula de cierre instantáneo (aguas abajo) – ver Figura 6. La tubería será dividida en 5 sub-tramos ( $N = 5$ ), de forma que haya  $N + 1$  (= 6) nudos y 12 incógnitas. Por tanto, la obtención de una solución única pasará por resolver un sistema compuesto por 12 ecuaciones (Figura 7). Diez de esas ecuaciones serán obtenidas a partir de las ecuaciones (11) y (12) aplicadas en los sub-tramos 1 al 5. Una ecuación adicional saldrá de la condición de borde aguas arriba correspondiente al estanque de cota constante (Ecuación 22) ubicada en el nudo de borde 1, donde  $H_1^{t+\Delta t} = H_0^{t+\Delta t}$ , con  $H_0^{t+\Delta t}$  = altura de la superficie de agua del estanque. La segunda ecuación adicional sale de especificar que en el nudo de borde aguas abajo  $H_6^{t+\Delta t} = C_c = H_{val}^{t+\Delta t}$ , con  $H_{val}^{t+\Delta t}$  = cota piezométrica correspondiente a la válvula de cierre instantáneo; es decir, con  $\tau = 0$  al inicio del transitorio (Ecuación 23). En caso de suponer que la válvula tiene un cierre gradual, entonces se deben especificar los parámetros incluidos en la Ecuación (23). Las ecuaciones algebraicas resultantes son mostradas en la Figura 7, donde los coeficientes  $d_1, d_2, d_3, d_4, c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$  pueden variar de un sub-tramo a otro.

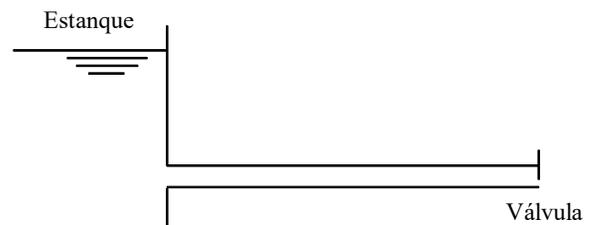


Figura 6 Esquema de la red ejemplo.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 d_1 & d_2 & -d_3 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -c_1 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d_1 & d_2 & -d_3 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_1 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & -d_3 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & -d_3 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & -d_3 & d_3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & c_1 & c_2 & c_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Q_1^{t+\Delta t} \\
 H_1 \\
 Q_2 \\
 H_2 \\
 Q_3 \\
 H_3 \\
 Q_4 \\
 H_4 \\
 Q_5 \\
 H_5 \\
 Q_6 \\
 H_6 \\
 H_{val}^{t+\Delta t}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 H_0^{t+\Delta t} \\
 -d_4 \\
 -c_4 \\
 -d_4 \\
 -c_4
 \end{bmatrix}$$

**Figura 7** Sistema de ecuaciones del MDFI en forma de banda para una tubería con  $N = 5$  sub-tramos. Se incluyen dos ecuaciones correspondientes a las condiciones de borde (aguas arriba y aguas abajo) de la tubería.

### 2.7 Solución utilizando una malla $x - t$ no uniforme

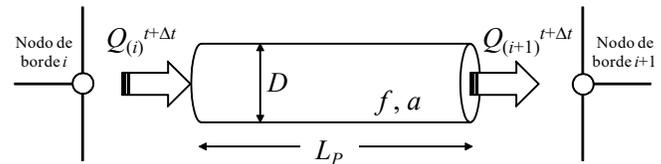
La transformación del dominio  $x - t$  a un conjunto de líneas características resulta problemático cuando el MC debe usar una malla  $x - t$  uniforme y fija para resolver el flujo transitorio en redes compuestas por múltiples tuberías. Estos problemas se producen porque el MC de malla uniforme idealmente requiere que todas las tuberías satisfagan exactamente la condición de Courant. Sin embargo, las tuberías generalmente tienen diferentes velocidades de onda y longitudes, por lo tanto, dicha condición hace que sea extremadamente improbable contar con un número entero de sub-tramos ( $N$ ) en todos los conductos (Ghidaoui y Karney, 1994). Karney y Ghidaoui (1997) abordan esto mediante un algoritmo de discretización flexible computacionalmente eficiente, que permite obtener soluciones con buen nivel de concordancia con el resultado exacto. Samani y Khayatzadeh (2001) aplican un método de discretización flexible para resolver el golpe de ariete, basado en discretizaciones con sub-tramos de longitud desproporcionada que permitiría trabajar con Courant distintos de 1 sin afectar significativamente los resultados respecto de la solución exacta. Sin embargo, una forma de lidiar con lo anterior es mediante la aplicación de un método original basado en una combinación entre el MC y un Elemento de Reemplazo de Tuberías ERT, el cual será denominado MCERT, el cual será descrito en una sección posterior.

**ERT.** Este concepto supone que algunas tuberías pueden ser sustituidas por aproximaciones basadas en diferencias finitas, trabajando la tubería reemplazada como si se tratara de una condición de borde con dos nudos:  $i$  (aguas arriba) e  $i + 1$  (aguas abajo) – ver **Figura 8**. En este caso, las ecuaciones de la dinámica y de continuidad pueden ser representadas según las ecuaciones del MDFI mostradas en secciones anteriores. Teniendo en cuenta la **Figura 8** es necesario considerar el conjunto de ecuaciones (11) y (12), junto con las siguientes expresiones adicionales derivadas

de la ecuación (21), antes aplicadas a un nudo simple de la red, ahora aplicadas al nudo izquierdo ( $i$ ) y derecho ( $i + 1$ ) de un ERT (Twyman, 2004; 2017b):

$$H_{(i)}^{t+\Delta t} = C_{c(i)} - B_{c(i)} \cdot Q_{(i)}^{t+\Delta t} \quad (25)$$

$$H_{(i+1)}^{t+\Delta t} = C_{c(i+1)} + B_{c(i+1)} \cdot Q_{(i+1)}^{t+\Delta t} \quad (26)$$



**Figura 8** Esquema de un ERT

En la ecuación (25) se considera el signo “-” en la expresión de lado derecho cuando el consumo nodal sale del nudo ubicado aguas arriba hacia el ERT; en la ecuación (26) el signo es “+” porque el consumo nodal está entrando en el nudo ubicado aguas abajo del ERT. Reemplazando las ecuaciones (25) y (26) en las ecuaciones (11) y (12), simplificando y resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene (Twyman, 2004; 2017b):

$$Q_{(i)}^{t+\Delta t} = \frac{E_2 E_6 - E_3 E_5}{E_2 E_4 - E_1 E_5} \quad (27)$$

$$Q_{(i+1)}^{t+\Delta t} = \frac{E_3 - E_1 Q_{(i)}^{t+\Delta t}}{E_2} \quad (28)$$

Siendo  $E_1, E_2, E_3$ , etcétera constantes conocidas que dependen de las características físicas de la tubería y de valores de  $Q$  y  $H$  determinados en el paso de tiempo anterior. Finalmente, conocidos  $Q_{(i)}^{t+\Delta t}$  y  $Q_{(i+1)}^{t+\Delta t}$  es posible obtener los valores de las presiones en el paso de tiempo  $\Delta t$  aplicando las ecuaciones (27) y (28) en (25) y (26). El ERT puede ser usado como una herramienta para mejorar el desempeño del MC cuando es aplicado a un sub-tramo central.

**MCERT.** La forma y secuencia de aplicación del algoritmo en cada  $\Delta t$  es mostrada en las **Figuras 9 y 10**. El ERT se ubicará entre los nudos  $i$  e  $i + 1$ , los cuales pueden ser determinados usando la expresión (Twyman, 2004; 2017b):  $i = \text{int}(N/2) + 1$ . El término  $\text{int}$  denota valor entero. El algoritmo funciona en tramos con  $N$  par o impar. Una particularidad del algoritmo mostrado en la **Figura 10** es que permite discriminar cada tramo en función del  $C_r$  que tenga asignado, aplicando el MC o el MCERT dependiendo de si el valor de  $C_r$  es igual (o cercano) a 1,0; o menor que 1,0; respectivamente, permitiendo resolver el problema en forma más eficiente desde un punto de vista numérico. El MCERT tiene dos ventajas relevantes: no necesita interpolar ni ajustar la magnitud

de  $a$  para mantener su estabilidad cuando  $C_r < 1,0$ ; y es totalmente explícito.

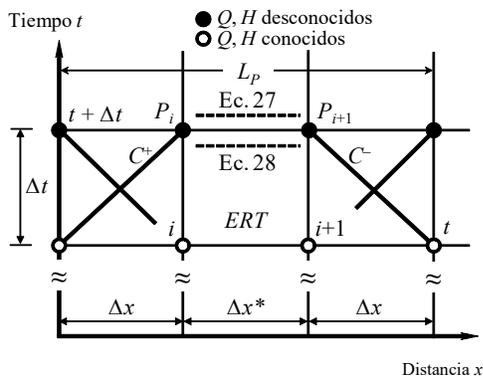


Figura 9 Esquema del MCERT para una tubería con  $C_r < 1,0$  y discretizada con  $N$  sub-tramos.

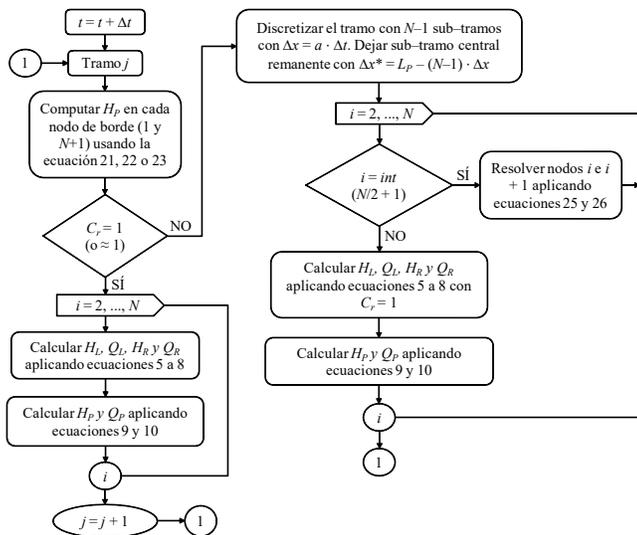


Figura 10 Flujo del esquema de solución que incorpora al MCERT.

Entre sus desventajas destacan: dada la forma como discretiza las tuberías, necesariamente debe trabajar en tramos con un  $N$  mínimo  $\geq 3$ ; el sub-tramo central (ERT), al ser derivado desde un esquema de 2do. orden (MDFI), puede generar oscilaciones espurias al modelar transitorios rápidos.

### 3. Resultados

#### 3.1 Ejemplo de aplicación 1

Se considera una red simple (Figura 11a) compuesta por un estanque (D1) de gran diámetro ubicado en el extremo aguas arriba del sistema ( $H_0 = 100$  m), tres tuberías (T1, T2 y T3)

conectadas en serie de material acero (T1 y T3) y PVC rígido (T2), y una válvula de regulación (Rg1) ubicada en el extremo aguas abajo, con tiempo de cierre de 1 s (Figura 11b). El caudal inicial es  $Q_0 = 134,76$  (L/s). Todos los nudos tienen cota  $Z = 0$  (m). Las longitudes de T1, T2 y T3 son 3.500, 500 y 4.000 (m), respectivamente, y sus diámetros internos corresponden a  $D_{int} = 500$  (mm). La velocidad de onda de T1 y T3 es igual a 1.002,1 (m/s), y la de T2 es igual a 163,9 (m/s). En este caso, la solución transitoria según el MC será obtenida aplicando el software comercial Allievi (más detalles en [www.allievi.net](http://www.allievi.net)).

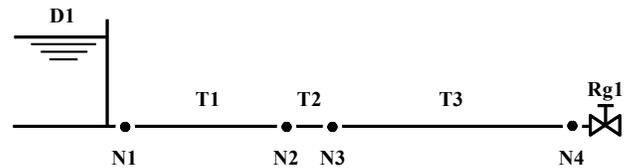


Figura 11a Esquema de la red ejemplo 1 (sin escala).

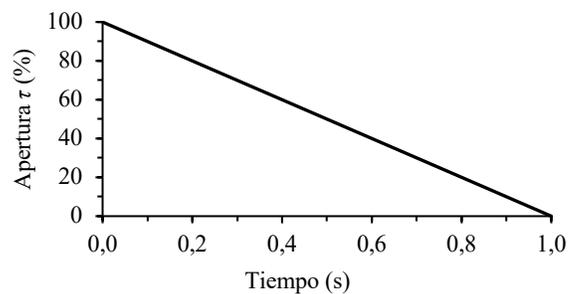
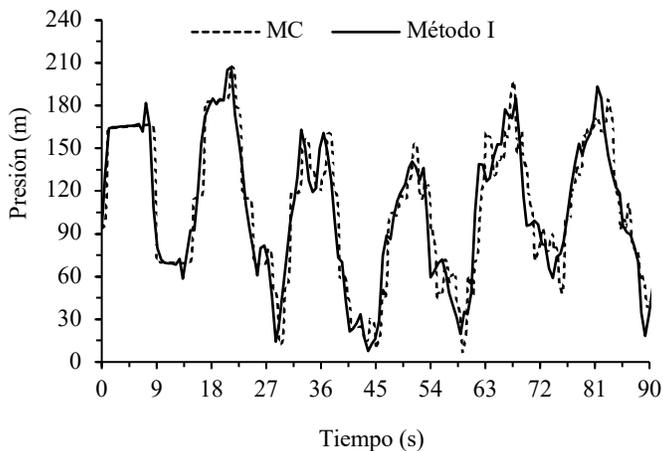


Figura 11b Curva de cierre de la válvula (Rg1) en función del tiempo.

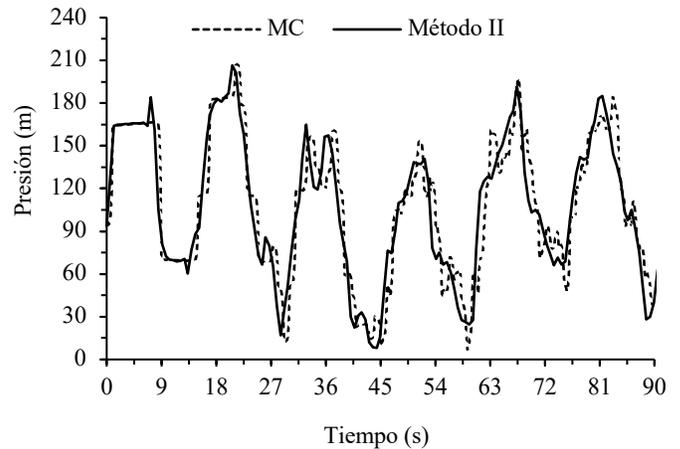
**Discretización de la red 1 usando el MC.** La red será discretizada de forma de evitar un ajuste en el valor original de  $a$  superior a  $\pm 0,5\%$  en orden a conseguir que  $C_r = 1,0$  en todas las tuberías. Esto se consigue iterando el valor de  $\Delta t$  y analizando lo que sucede en cada caso, donde para cada situación se propone un valor alternativo para  $a$  o una indicación sobre la longitud que debiera adoptar el tramo que está dificultando la discretización de la red. Después de un proceso de prueba y error, se consigue un  $C_r = 1,0$  para cada tubería del sistema con  $\Delta t = 0,05$  (s) y  $N$  igual a 70, 61 y 80 para T1, T2 y T3, respectivamente.

**Solución transitoria.** Se verifica el desempeño numérico de MDFI y MCERT considerando una discretización distinta a la establecida por el MC, con  $N = 5, 5$  y  $6$  para T1, T2 y T3, respectivamente, dejando inalterados los valores originales de  $a$ . Dado lo anterior, el paso de tiempo  $\Delta t$  queda igual a 0,61012813 (s). El **MÉTODO I** trabaja considerando  $\Delta x = a \cdot \Delta t$  para los sub-tramos adyacentes a los nudos de borde 1 y  $N + 1$  de cada tubería (quedando  $\Delta x = 611,41$  m para T1 y T3, y  $\Delta x = 100,00$  m para T2), y  $\Delta x' =$

$(L_p - 2 \cdot a \cdot \Delta t) / (N - 2)$  para los sub-tramos restantes internos ( $\Delta x' = 759,06$  m para T1,  $\Delta x' = 100,00$  m para T2 y  $\Delta x' = 694,29$  m para T3). Esto permite al método I calcular  $Q$  y  $H$  en los nudos de borde mediante el MC sin necesidad de aplicar interpolaciones. En este caso el MDFI resuelve un sistema de ecuaciones de tamaño  $2(N + 1)$  por cada tramo y en cada  $\Delta t$ . Dicho sistema es construido tomando en cuenta los nudos de borde de cada tramo (ecuaciones 21, 22 o 23, según sea el caso), junto con las ecuaciones (11) y (12), válidas para resolver los nudos internos pertenecientes a cada sub-tramo de cada tubería. Esto se aplica independientemente del valor que tenga  $C_r$  en cada tramo. En el **MÉTODO II** se aplica un procedimiento de discretización diferente dependiendo del número de Courant asignado a la tubería. Si el tramo tiene un  $C_r = 1,0$ , se aplica el MC con la tubería discretizada con  $\Delta x = L_p / N$ , con lo cual en T2 se tendría  $\Delta x = 100$  (m). En cambio, si la tubería tiene un  $C_r < 1,0$  entonces se re-discretiza el tramo definiendo  $(N - 1)$  sub-tramos con  $\Delta x = a \cdot \Delta t$ , dejando el sub-tramo remanente con  $\Delta x^* = L_p - (N - 1) \cdot \Delta x$ . En este caso, al calcular los valores en T1 y T3 se obtiene:  $\Delta x = 611,41$  (m), con  $\Delta x^* = 1.054,36$  m (T1) y  $\Delta x^* = 942,95$  m (T3). Los nudos pertenecientes a los sub-tramos con  $\Delta x$  se resuelven vía el MC, y los nudos pertenecientes al sub-tramo remanente con  $\Delta x^*$  se resuelven vía el ERT. Las **Figuras 12a** y **12b** muestran un comparativo de la presión en función del tiempo en N4 según MC y los métodos I y II.



**Figura 12a** Curva de presión en función del tiempo en N4 cuando la red es resuelta mediante el MC y el método I.



**Figura 12b** Curva de presión en función del tiempo en N4 cuando la red es resuelta mediante el MC y el método II.

La **Tabla 1** muestra un comparativo de las presiones extremas calculadas por el MC y los métodos I y II. La **Tabla 2** muestra el tiempo de ejecución gastado por cada método para llegar a la solución cuando el tiempo máximo de simulación ( $T_{m\acute{a}x}$ ) es igual a 90 (s). Los esquemas fueron corridos en un PC estándar de 64 bits con velocidad de procesamiento de 1,40 (GHz).

**Tabla 1** Comparación de presiones extremas entre MC y los métodos I y II.

| Presión extrema | Método |        |        | Error (m) |      |
|-----------------|--------|--------|--------|-----------|------|
|                 | MC     | I      | II     | I         | II   |
| Máxima (m)      | +207,4 | +207,1 | +206,5 | -0,3      | -0,9 |
| Mínima (m)      | +6,6   | +7,7   | +8,2   | +1,1      | +1,6 |

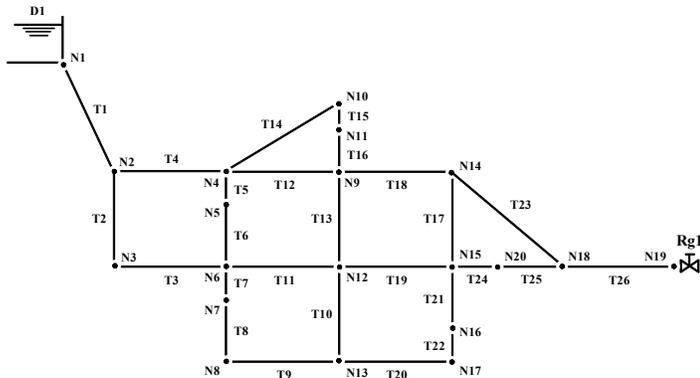
**Tabla 2** Tiempos de ejecución del MC y de los métodos I y II.

| Método | Tiempo de Ejecución (s) |
|--------|-------------------------|
| MC     | 14,0                    |
| I      | 1,6                     |
| II     | 0,3                     |

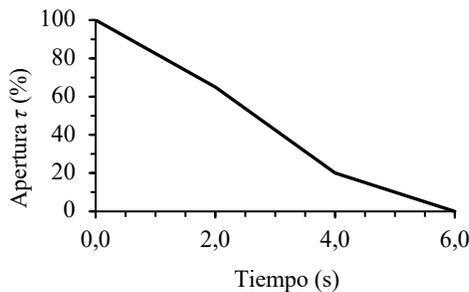
A partir de las **Figuras 12a** y **12b**, y de las **Tablas 1** y **2**, se verifica que los métodos I y II registran un buen desempeño numérico al comparar la forma de las curvas de presión en función del tiempo y las presiones extremas, siendo además mucho más rápidos que el MC, con el mérito adicional de funcionar de manera estable y relativamente precisa con valores de  $N$  significativamente menores, lo cual les permite trabajar con  $\Delta t$  mayores y lo más importante: sin necesidad de modificar los valores de  $a$  o  $L$  originalmente establecidos. El mérito del método II es que se trata de un esquema 100% explícito.

### 3.2 Ejemplo de aplicación 2

Se considera la red de la **Figura 13a**, compuesta por un estanque (D1) de gran diámetro ubicado en el extremo aguas arriba del sistema, con cota inicial del agua  $H = 70$  (m), 26 tuberías (T1, T2, etcétera) interconectadas (**Tabla 3**) y una válvula de regulación (Rg1) ubicada en el extremo aguas abajo de la tubería T26, con un tiempo de cierre de 6,0 s (**Figura 13b**).



**Figura 13a.** Esquema de la red ejemplo 2 (sin escala).



**Figura 13b.** Curva de cierre de la válvula (Rg1) en función del tiempo.

**Tabla 3** Datos de las tuberías (acero) de la red ejemplo 2.

| Tubería | $L_p$ (m) | $D_{int}$ (mm) | $f$ (Darcy) | $a_0$ (m/s) |
|---------|-----------|----------------|-------------|-------------|
| T1      | 150       | 200            | 0,018       | 1.005,84    |
| T2      | 150       | 200            | 0,019       | 1.143,00    |
| T3      | 150       | 200            | 0,019       | 1.219,20    |
| T4      | 150       | 200            | 0,018       | 914,40      |
| T5      | 25        | 200            | 0,022       | 1.143,00    |
| T6      | 125       | 200            | 0,022       | 975,40      |
| T7      | 30        | 200            | 0,020       | 957,10      |
| T8      | 200       | 200            | 0,020       | 914,40      |
| T9      | 150       | 200            | 0,020       | 1.005,80    |
| T10     | 230       | 200            | 0,027       | 1.005,80    |

|     |     |     |       |          |
|-----|-----|-----|-------|----------|
| T11 | 150 | 200 | 0,019 | 1.005,80 |
| T12 | 150 | 200 | 0,019 | 914,40   |
| T13 | 150 | 200 | 0,022 | 1.005,80 |
| T14 | 250 | 200 | 0,020 | 975,40   |
| T15 | 80  | 200 | 0,020 | 1.005,80 |
| T16 | 120 | 200 | 0,020 | 1.005,80 |
| T17 | 150 | 200 | 0,023 | 1.005,80 |
| T18 | 150 | 200 | 0,019 | 1.143,00 |
| T19 | 150 | 200 | 0,019 | 1.005,80 |
| T20 | 150 | 200 | 0,020 | 1.219,20 |
| T21 | 150 | 200 | 0,020 | 1.005,80 |
| T22 | 80  | 200 | 0,020 | 1.005,80 |
| T23 | 250 | 200 | 0,018 | 914,40   |
| T24 | 50  | 200 | 0,018 | 1.005,80 |
| T25 | 150 | 200 | 0,018 | 1.005,80 |
| T26 | 450 | 200 | 0,018 | 975,40   |

Todos los nudos tienen cota  $Z = 0$  (m).  $T_{máx} = 60$  (s).

**Discretización de la red 2 usando el MC.** La red será discretizada de forma de evitar un ajuste en el valor original de  $a_0$  superior a  $\pm 15\%$  en orden a conseguir que  $C_r = 1,0$  en todas las tuberías, con lo cual se obtiene  $\Delta t = 0,02186653$  (s) y  $N$  según la **Tabla 4**. La única excepción la constituye la tubería 7 donde la variación de  $a_1$  (nuevo valor ajustado) fue de  $-43\%$ , situación que no debiera representar un problema significativo en la calidad de los resultados. El resultado arrojado por el MC mediante esta discretización será considerado exacto para efectos de comparación con otros esquemas numéricos.

**Tabla 4**  $N$  y Courant según MC y métodos I y II (ejemplo 2).

| Tubería | $N$ MC | $a_1$ (m/s) | $N$ Métodos I, II | Courant Método I | Courant Método II |
|---------|--------|-------------|-------------------|------------------|-------------------|
| T1      | 7      | 977         | 3                 | 0,57             | 0,57              |
| T2      | 6      | 1.142       | 3                 | 0,77             | 0,77              |
| T3      | 6      | 1.142       | 3                 | 0,91             | 0,97              |
| T4      | 7      | 978         | 4                 | 0,94             | 0,97              |
| T5      | 1      | 1.143       | 1                 | 1,82             | 1,82              |
| T6      | 6      | 953         | 3                 | 0,82             | 0,82              |
| T7      | 1      | 1.371       | 1                 | 1,27             | 1,27              |
| T8      | 10     | 914         | 5                 | 0,86             | 0,67              |
| T9      | 7      | 979         | 3                 | 0,57             | 0,57              |

|              |            |             |           |             |             |
|--------------|------------|-------------|-----------|-------------|-------------|
| T10          | 10         | 1.052       | 5         | 0,80        | 0,57        |
| T11          | 7          | 979         | 3         | 0,57        | 0,57        |
| T12          | 7          | 979         | 4         | 0,94        | 0,97        |
| T13          | 7          | 980         | 3         | 0,57        | 0,57        |
| T14          | 12         | 952         | 6         | 0,90        | 0,69        |
| T15          | 1          | 914         | 1         | 0,50        | 0,50        |
| T16          | 5          | 1.097       | 3         | 1,00        | 1,00        |
| T17          | 7          | 980         | 3         | 0,57        | 0,57        |
| T18          | 6          | 1.142       | 3         | 0,77        | 0,77        |
| T19          | 7          | 979         | 3         | 0,57        | 0,57        |
| T20          | 6          | 1.143       | 3         | 0,91        | 0,97        |
| T21          | 7          | 979         | 3         | 0,57        | 0,57        |
| T22          | 1          | 914         | 1         | 0,50        | 0,50        |
| T23          | 12         | 951         | 6         | 0,82        | 0,53        |
| T24          | 1          | 1.142       | 1         | 0,80        | 0,80        |
| T25          | 7          | 978         | 3         | 0,57        | 0,57        |
| T26          | 21         | 977         | 11        | 0,94        | 0,64        |
| <b>Total</b> | <b>175</b> | <b>----</b> | <b>88</b> | <b>----</b> | <b>----</b> |

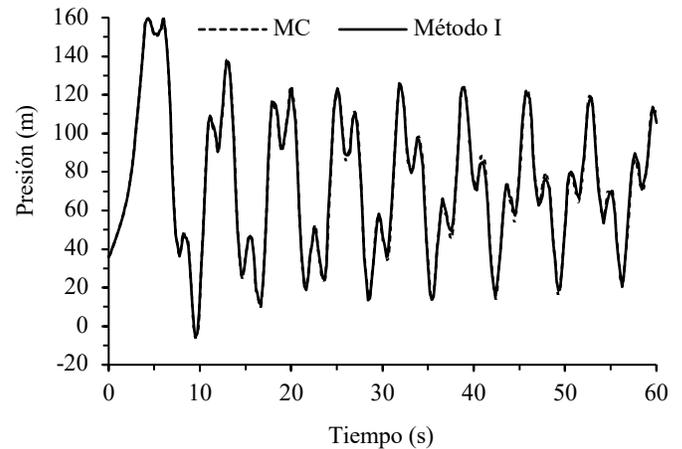
**Solución transitoria.** Se verifica el desempeño numérico de los métodos I y II considerando una discretización distinta a la aplicada para MC, aunque sin alterar los valores originales de  $\alpha$ . Por ejemplo, según los **MÉTODOS I y II** con  $\Delta t = 0,04$  (s) para ambos esquemas, se tienen los valores de  $N$  y Courant según lo mostrado en la **Tabla 4**. Las **Figuras 14a y 14b** muestran un comparativo de la presión en función del tiempo en N19 según el MC y los métodos I y II. La **Tabla 5** muestra un comparativo de las presiones extremas calculadas por el MC y los métodos I y II. La **Tabla 6** muestra el tiempo de ejecución gastado por cada método.

**Tabla 5** Comparación de presiones extremas entre MC y los métodos I y II.

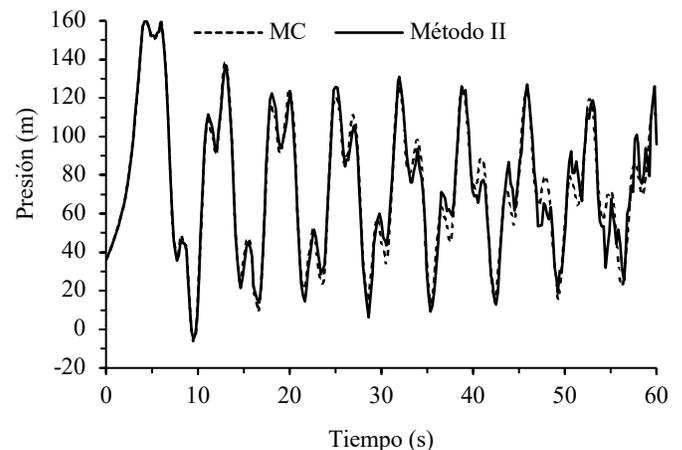
| Presión extrema | Método |        |        | Error (m) |      |
|-----------------|--------|--------|--------|-----------|------|
|                 | MC     | I      | II     | I         | II   |
| Máxima (m)      | +159,9 | +159,6 | +159,9 | -0,3      | 0,0  |
| Mínima (m)      | -6,3   | -5,7   | -5,0   | +0,6      | +1,3 |

**Tabla 6** Tiempos de ejecución del MC y de los métodos I y II.

| Método | Tiempo de ejecución (s) |
|--------|-------------------------|
| MC     | 2.053                   |
| I      | 2.084                   |
| II     | 881                     |



**Figura 14a** Curva de presión en función del tiempo en N19 cuando la red es resuelta usando el MC y el método I.



**Figura 14b** Curva de presión en función del tiempo en N19 cuando la red es resuelta usando el MC y el método II.

A partir de las **Figuras 14a y 14b**, y **Tablas 5 y 6**, se verifica que los métodos I y II registran un buen desempeño numérico, con errores en las presiones extremas máximas y mínimas que oscilan entre 0 y +1,3 (m). Además, según la **Tabla 6**, queda de manifiesto que el método II es el más rápido de todos, mostrando un buen nivel de precisión respecto de las expresiones extremas al compararlas con las entregadas por el MC (exacto). Por otro lado, el MC y el método I muestran un tiempo de ejecución muy similar, lo cual significa que la red propuesta puede ser resuelta indistintamente por cualquiera de ambos métodos, siendo la ventaja del método I que utiliza casi un 50% menos memoria computacional ( $N$ ) en comparación al MC (**Tabla 4**). Además, el desempeño del método I, comparable al mostrado por MC, se justifica toda vez que fue aplicado reemplazando los tramos relativamente cortos (T5, T7, T15, T22 y T24) por elementos de

reemplazo de tuberías (Twyman, 2018), lo que permite acceder a mayores  $\Delta t$  con menor cantidad de  $N$  total. Al igual que en el ejemplo anterior, los métodos fueron corridos en un PC estándar de 64 bits con una velocidad de procesamiento de 1,40 (GHz).

#### 4. Discusión

La mayoría de los programas de golpe de ariete basados en el MC y que trabajan con una malla espacio-tiempo con intervalo de tiempo pre-especificado imponen la condición de Courant en todos los tramos del sistema, esto para garantizar la estabilidad y exactitud de la solución en términos numéricos y evitar la utilización de interpolaciones numéricas que podrían degradar la solución. En la práctica esto significa que cada tramo debe cumplir con la relación  $a \cdot \Delta t = \Delta x = L_p/N$ . En general, las redes se componen de tuberías con distinto  $L_p$  y/o  $a$ , por lo que una vez definido el  $\Delta t$  común para todo el sistema, la fórmula usual para cumplir con Courant consiste en ajustar el valor de  $a$  hasta en  $\pm 15\%$  en cada tramo que lo necesite. En este caso, se estableció un porcentaje máximo de variación razonable para  $a$ , que en los ejemplos analizados fueron  $\pm 0,5\%$  (ejemplo 1) y  $\pm 15,0\%$  (ejemplo 2). Para el ejemplo 1, esto significó adoptar un  $\Delta t = 0,05$  (s), y un  $N$  total igual a 211. Para el ejemplo 2,  $\Delta t = 0,02186653$  (s) y  $N$  total = 175. Esto permitió establecer condiciones necesarias para hacer una comparación entre el MC y los métodos I (implícito) y II (explícito), tomando en cuenta que estos dos últimos esquemas no necesitan modificar ningún dato inicial para mantener sus propiedades de estabilidad y precisión numérica. Los métodos I y II trabajan con un algoritmo de discretización flexible que se adapta a las condiciones físicas de cada sistema, por lo que no requieren adoptar una discretización igual a la necesitada por el MC como paso previo para resolver un problema. Esto constituye una ventaja evidente toda vez que les permite trabajar con  $\Delta t$  mayores,  $N$  menores y con  $C_n \neq 1,0$  sin que sus propiedades numéricas sean afectadas significativamente. Para efectos prácticos, en ambos ejemplos analizados se supuso que el resultado entregado por el MC con  $C_r = 1,0$  correspondía al valor exacto, esto para disponer de valores de referencia sobre los cuales calcular un error relativo. La aplicación de las ecuaciones (21), (22) y (23) diseñadas para el tratamiento simple de las condiciones de borde insertas en redes complejas permite desacoplar la red en sus diferentes tuberías, permitiendo la solución de los nudos internos mediante distintos esquemas numéricos, como el MDFI o el MCERT, los cuales registran un mejor desempeño numérico en redes donde  $C_r$  es distinto de 1,0. En el caso del MDFI se consigue además trabajar con sistemas de ecuaciones (uno por tramo) de tamaño proporcional a la cantidad de sub-tramos de cada tubería. Esto hace que el tamaño máximo del sistema de ecuaciones sea igual a 14X14 y 24X24 para los ejemplos 1 y 2, tamaños impuestos por T3 (ejemplo 1) y por T26 (ejemplo 2), respectivamente. Esto constituye una alternativa

más eficiente respecto de otra metodología similar propuesta por Chaudhry (1982), la cual trabaja construyendo y resolviendo un gran sistema de ecuaciones representativa de toda la red, cuyo tamaño mínimo sería de 38X38 en el ejemplo 1 y de al menos 71X71 en el ejemplo 2, con todas las implicancias en términos de uso de recursos computacionales. En el ejemplo 1 el método I registra dos picos de presión espurios en  $t = 7,3$  (s) y  $t = 13,4$  (s) iguales a 181,8 (m) y 58,7 (m), respectivamente, los cuales pueden ser atenuados modificando levemente los valores de los factores de ponderación del MDFI.

#### 5. Conclusiones

Se concluye que los métodos I (implícito) y II (explícito) permiten conocer el comportamiento transitorio de una red en forma estable y precisa sin necesidad de cumplir rigurosamente con el criterio de Courant en todo el sistema, lo cual a su vez evita incurrir en un gasto significativo de recursos computacionales, especialmente cuando el sistema se compone de tuberías con distintas características (longitudes, velocidades de onda, etcétera). La modelación de los tramos cortos mediante elementos de reemplazo de tuberías permite readecuar la discretización de la red de forma de conseguir un menor efecto de ralentización del programa computacional debido a la magnitud de  $\Delta t$ , ya que de lo contrario la modelación transitoria dependería siempre de la longitud que tengan los tramos excesivamente cortos, afectando con ello la memoria y tiempo de ejecución.

#### 6. Bibliografía

- [1] Arfaie, M.; Anderson, A, 1991. Implicit Finite-Differences for Unsteady Pipe Flow, *Mathematical Engineering for Industry*, 3(2), 133-151.
- [2] Boulos, P.F.; Karney, B.W.; Wood D.J.; Lingireddy S., 2005. Hydraulic Transient Guidelines for Protecting Water Distribution Systems. *Journal of AWWA*, 97(5), 111-124.
- [3] Chaudhry, M.H., 1979. *Applied Hydraulic Transients*, p. 266, New York, Van Nostrand Reinhold, \*p. 395.
- [4] Chaudhry, M.H., 1982. Numerical Solution of Transient-Flow Equations. *Proc. Speciality Conf. Hydraulics Division, ASCE, Jackson, MS*, 633-656.
- [5] Chaudhry, M.H.; Hussaini, M.Y., 1985. Second-Order Accurate Explicit Finite-Difference Schemes for Waterhammer Analysis. *Journal of Fluids Engineering*, 107, 523-529, DOI:10.1115/1.3242524.
- [6] Chen, H.; Liu, H.; Chen, J.; Wu, L., 2013. Chebyshev Super Spectral Viscosity Method for Water Hammer Analysis, *Propulsion and Power Research*, 2(3), 201-207.
- [7] Ghidaoui, M.S.; Karney, B.W., 1994. Equivalent Differential Equations in Fixed-Grid Characteristics Method. *Journal of*



- Hydraulic Engineering, 120(10), 1159-1175, <http://hdl.handle.net/1783.1/26993>.
- [8] Goldberg, D.E.; Wylie, E.B., 1983. Characteristics Method using Time-Line Interpolations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(5), 670-683.
- [9] Izquierdo, J.; Pérez, R.; Fuertes, V.S.; Iglesias, P.L.; López, P.A., 2004a. Matemáticas para la Industria del Agua, *Ingeniería del Agua*, 11(2), 171-189.
- [10] Izquierdo, J.; Pérez, R.; Iglesias, P.L., 2004b. Mathematical Models and Methods in the Water Industry. *Mathematical and Computer Modelling*, 39, 1353-1374.
- [11] Karney, B.W., 1984. Analysis of Fluids Transients in Large Distribution Networks (Ph.D. Thesis). Vancouver: The University of British Columbia.
- [12] Karney, B.W.; McInnis, D., 1992. Efficient Calculation of Transient Flow in Simple Pipe Networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(7), 1014-1030.
- [13] Karney, B.W.; Ghidaoui, M.S., 1997. Flexible Discretization Algorithm for Fixed-Grid MOC in Pipelines. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(11), 1004-1011, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:11(1004).
- [14] Nault, J.D.; Karney, B.W.; Jung, B.-S., 2018. Generalized flexible method for simulating transient pipe network hydraulics. *Journal of Hydraulic Engineering*, 144(7), 04018031.
- [15] Nerella, R.; Rathnam, E.V., 2015. Fluid Transients and Wave Propagation in Pressurized Conduits due to Valve Closure. *International Conference on Computational Heat and Mass Transfer-2015*, *Procedia Engineering* 127, 1158-1164.
- [16] Salgado, R.O. (1992, 8-12 Septiembre). Revisión de los Métodos Numéricos para el Análisis del Ecurrimiento Impermanente en Redes de Tuberías a Presión. XV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Cartagena, IAHR.
- [17] Salgado, R.O.; Twyman, J.; Twyman, C.; Zenteno J.C. (1993a, 5-7 Noviembre). Golpe de Ariete en Redes de Agua Potable. Enfoque Numérico de Análisis. X Congreso Chileno de Ing. Sanitaria y Ambiental, Valdivia, AIDIS.
- [18] Salgado, R.; Zenteno, J.; Twyman, C.; Twyman, J. (1993b, 7-9 September). A Hybrid Characteristics-Finite Difference Method for Unsteady flow in Pipe Networks, *International Conference on Integrated Computer Applications for Water Supply and Distribution*, Leicester.
- [19] Samani, H.M.V.; Khayat-zadeh, A., 2002. Transient Flow in Pipe Networks, *Journal of Hydraulic Research*, 40(5), 637-644, doi: 10.1080/00221680209499908.
- [20] Twyman, J.; Twyman, C.; Salgado, R.O. (1997, 22-24 octubre). Optimización del Método de las Características para el Análisis del Golpe de Ariete en Redes de Tuberías, XIII Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica (53-62). Santiago de Chile, SOCHID.
- [21] Twyman, J., 2004. Decoupled Hybrid Methods for Unsteady Flow in Pipe Networks, p. 185. Valparaíso: Editorial La Cáfila, p\* 102-110.
- [22] Twyman J. (2016a, 26-30 Septiembre). Golpe de Ariete en una Red de Distribución de Agua. *Anales del XXVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica IAHR* (pp. 10), Lima, Spain Water and IWHR China.
- [23] Twyman, J., 2016b. Wave Speed Calculation for Water Hammer Analysis, *Obras y Proyectos, UCSC*, 20, 86-92, doi: 10.4067/S0718-28132016000200007.
- [24] Twyman, J., 2017a. Water Hammer Analysis in a Water Distribution System. *Ingeniería del Agua*, 21(2), 87-102, <https://doi.org/10.4995/la.2017.6389>
- [25] Twyman, J., 2017b. Métodos para el Análisis del Flujo Transiente en Redes de Tuberías, p. 137, *Editorial Académica Española*, \*p. 43, 71, 74, 89-94.
- [26] Twyman, J. 2018. Elementos de Reemplazo de Tuberías para el Análisis del Flujo Transitorio en Redes de Tuberías. *Journal of Construction and Civil Engineering RIOCI*, 8(2), 17-24. <http://www.rioc.cl/index.php/RIOC/article/view/02>
- [27] Watt, C.S.; Boldy, A.P.; Hobbs, J.M., 1980. Combination of Finite Difference and Finite Element Techniques in Hydraulic Transient Problems, Paper B2, *Third International Conference on Pressure Surges*, Canterbury, BHRA.
- [28] Wood, D.J., 2005. Water Hammer Analysis-Essential and Easy (And Efficient), *Journal of Environmental Engineering*, 131(8), 1123-1131.
- [29] Wood, D.J., Lingireddy, S., Boulos, P.F., Karney, B.W., McPherson, D.L. 2005. Numerical Methods for Modeling Transient Flow in Distribution Systems, *Journal of AWWA*, 97(7), 104-115.
- [30] Wylie, E.B.; Streeter, V.L., 1978. *Fluid Transients*, p. 206, McGraw-Hill International Book Company, \*p. 46.